More on Stable Ghosts

Alexander Vikman

13.10.2023

FZU Institute of Physics of the Czech Academy of Sciences
CEICO

PHYSICAL REVIEW LETTERS **128,** 041301 (2022)

Ghosts without Runaway Instabilities

Cédric Deffayet,[1,2,*] Shinji Mukohyama,[3,4,†] and Alexander Vikman[5,‡]

[1]*𝒢ℝεℂ𝒪, Institut d'Astrophysique de Paris, UMR 7095, CNRS, Sorbonne Université, 98[bis] boulevard Arago, 75014 Paris, France*
[2]*IHES, Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, F-91440 Bures-sur-Yvette, France*
[3]*Center for Gravitational Physics, Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University, 606-8502 Kyoto, Japan*
[4]*Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe (WPI), The University of Tokyo, Kashiwa, Chiba 277-8583, Japan*
[5]*CEICO–Central European Institute for Cosmology and Fundamental Physics, FZU–Institute of Physics of the Czech Academy of Sciences, Na Slovance 1999/2, 18221 Prague 8, Czech Republic*

(Received 26 August 2021; accepted 24 December 2021; published 24 January 2022)

We present a simple class of mechanical models where a canonical degree of freedom interacts with another one with a negative kinetic term, i.e., with a ghost. We prove analytically that the classical motion of the system is completely stable for all initial conditions, notwithstanding that the conserved Hamiltonian is unbounded from below and above. This is fully supported by numerical computations. Systems with negative kinetic terms often appear in modern cosmology, quantum gravity, and high energy physics and are usually deemed as unstable. Our result demonstrates that for mechanical systems this common lore can be too naive and that living with ghosts can be stable.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.128.041301

e-Print: 2108.06294

Journal of Cosmology and Astroparticle Physics
An IOP and SISSA journal

Received: *June 4, 2023*
Accepted: *June 5, 2023*
Published: *???, 2023*

JCAP Anniversary Special Issue

Global and local stability for ghosts coupled to positive energy degrees of freedom

Cédric Deffayet,[a] Aaron Held,[b,c] Shinji Mukohyama[d,e] and Alexander Vikman[f]

[a]*Laboratoire de Physique de l'École normale supérieure, ENS, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université Paris Cité, F-75005 Paris, France*
[b]*Theoretisch-Physikalisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Max-Wien-Platz 1, 07743 Jena, Germany*
[c]*The Princeton Gravity Initiative, Jadwin Hall, Princeton University, Princeton, New Jersey 08544, U.S.A.*
[d]*Center for Gravitational Physics and Quantum Information, Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University, 606-8502 Kyoto, Japan*
[e]*Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe (WPI), The University of Tokyo Institutes for Advanced Study, The University of Tokyo, Kashiwa, 277-8583 Chiba, Japan*
[f]*CEICO — Central European Institute for Cosmology and Fundamental Physics, FZU — Institute of Physics of the Czech Academy of Sciences, Na Slovance 1999/2, 18221 Prague 8, Czech Republic*

e-Print: 2305.09631

Ghosts

are dynamical degrees of freedom
with negative mass -
i.e. kinetic energy unbounded from below

Why are we interested in ghosts?

Why are we interested in ghosts?

- Interesting cosmology: Phantom Dark Energy - super accelerated universe with $\dot{H} > 0$, Bouncing universe etc. Inflation with blue spectrum of gravity waves

Why are we interested in ghosts?

- Interesting cosmology: Phantom Dark Energy - super accelerated universe with $\dot{H} > 0$, Bouncing universe etc. Inflation with blue spectrum of gravity waves
- Higher derivative systems have ghosts due to the Ostrogradsky theorem (1848)

Why are we interested in ghosts?

- Interesting cosmology: Phantom Dark Energy - super accelerated universe with $\dot{H} > 0$, Bouncing universe etc. Inflation with blue spectrum of gravity waves
- Higher derivative systems have ghosts due to the Ostrogradsky theorem (1848)
- jerk ($\dddot{x}$) equations are the minimal setting for solutions showing *chaotic behaviour* (electronic circuits (!) e.g. Chua's circuit)

Why are we interested in ghosts?

- Interesting cosmology: Phantom Dark Energy - super accelerated universe with $\dot{H} > 0$, Bouncing universe etc. Inflation with blue spectrum of gravity waves

- Higher derivative systems have ghosts due to the Ostrogradsky theorem (1848)

- jerk ($\dddot{x}$) equations are the minimal setting for solutions showing *chaotic behaviour* (electronic circuits (!) e.g. Chua's circuit)

- Renormalisation / quantisation of Gravity (Stelle, 1977)

$$S = \int M_{\mathrm{Pl}}^2 R + \alpha R^2 + \beta W_{\mu\nu\sigma\lambda} W^{\mu\nu\sigma\lambda} , \quad \text{Weyl tensor} \quad W = \partial\partial g$$

Why are we interested in ghosts?

- Interesting cosmology: Phantom Dark Energy - super accelerated universe with $\dot{H} > 0$, Bouncing universe etc. Inflation with blue spectrum of gravity waves

- Higher derivative systems have ghosts due to the Ostrogradsky theorem (1848)

- jerk ($\dddot{x}$) equations are the minimal setting for solutions showing *chaotic behaviour* (electronic circuits (!) e.g. Chua's circuit)

- Renormalisation / quantisation of Gravity (Stelle, 1977)

$$S = \int M_{\rm Pl}^2 R + \alpha R^2 + \beta W_{\mu\nu\sigma\lambda} W^{\mu\nu\sigma\lambda}, \quad \text{Weyl tensor} \quad W = \partial\partial g$$

- Questions related to entropy and thermodynamics

Why are we interested in ghosts?

- Interesting cosmology: Phantom Dark Energy - super accelerated universe with $\dot{H} > 0$, Bouncing universe etc. Inflation with blue spectrum of gravity waves

- Higher derivative systems have ghosts due to the Ostrogradsky theorem (1848)

- jerk ($\dddot{x}$) equations are the minimal setting for solutions showing *chaotic behaviour* (electronic circuits (!) e.g. Chua's circuit)

- Renormalisation / quantisation of Gravity (Stelle, 1977)

$$S = \int M_{\rm Pl}^2 R + \alpha R^2 + \beta W_{\mu\nu\sigma\lambda} W^{\mu\nu\sigma\lambda}\,, \quad \text{Weyl tensor} \quad W = \partial\partial g$$

- Questions related to entropy and thermodynamics

- Is it possible to screen gravity?

Why are we interested in ghosts?

- Interesting cosmology: Phantom Dark Energy - super accelerated universe with $\dot{H} > 0$, Bouncing universe etc. Inflation with blue spectrum of gravity waves

- Higher derivative systems have ghosts due to the Ostrogradsky theorem (1848)

- jerk ($\dddot{x}$) equations are the minimal setting for solutions showing *chaotic behaviour* (electronic circuits (!) e.g. Chua's circuit)

- Renormalisation / quantisation of Gravity (Stelle, 1977)

$$S = \int M_{\rm Pl}^2 R + \alpha R^2 + \beta W_{\mu\nu\sigma\lambda} W^{\mu\nu\sigma\lambda}\,, \quad \text{Weyl tensor} \quad W = \partial\partial g$$

- Questions related to entropy and thermodynamics

- Is it possible to screen gravity?

- Is it possible to screen the Cosmological Constant or the energy of quantum vacuum?

Why are we interested in ghosts?

- Interesting cosmology: Phantom Dark Energy - super accelerated universe with $\dot{H} > 0$, Bouncing universe etc. Inflation with blue spectrum of gravity waves

- Higher derivative systems have ghosts due to the Ostrogradsky theorem (1848)

- jerk ($\dddot{x}$) equations are the minimal setting for solutions showing *chaotic behaviour* (electronic circuits (!) e.g. Chua's circuit)

- Renormalisation / quantisation of Gravity (Stelle, 1977)

$$S = \int M_{\rm Pl}^2 R + \alpha R^2 + \beta W_{\mu\nu\sigma\lambda} W^{\mu\nu\sigma\lambda} , \quad \text{Weyl tensor} \quad W = \partial\partial g$$

- Questions related to entropy and thermodynamics

- Is it possible to screen gravity?

- Is it possible to screen the Cosmological Constant or the energy of quantum vacuum?

- Can gravitons be massive? (Boulware–Deser ghost, 1972, dRGT etc.)

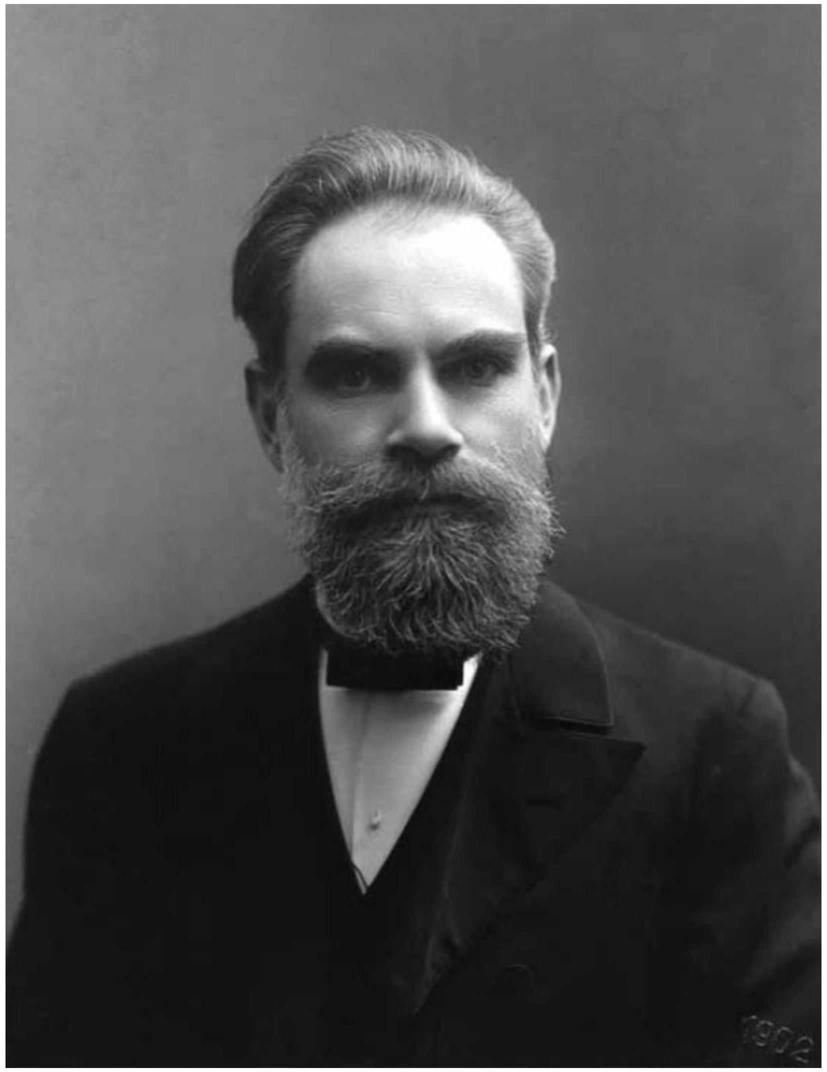
Giuseppe Ludovico De la Grange Tournier

Giuseppe Ludovico De la Grange Tournier

Lagrange Stability

the motion is finite -
is bounded in phase space -
“Global Stability”

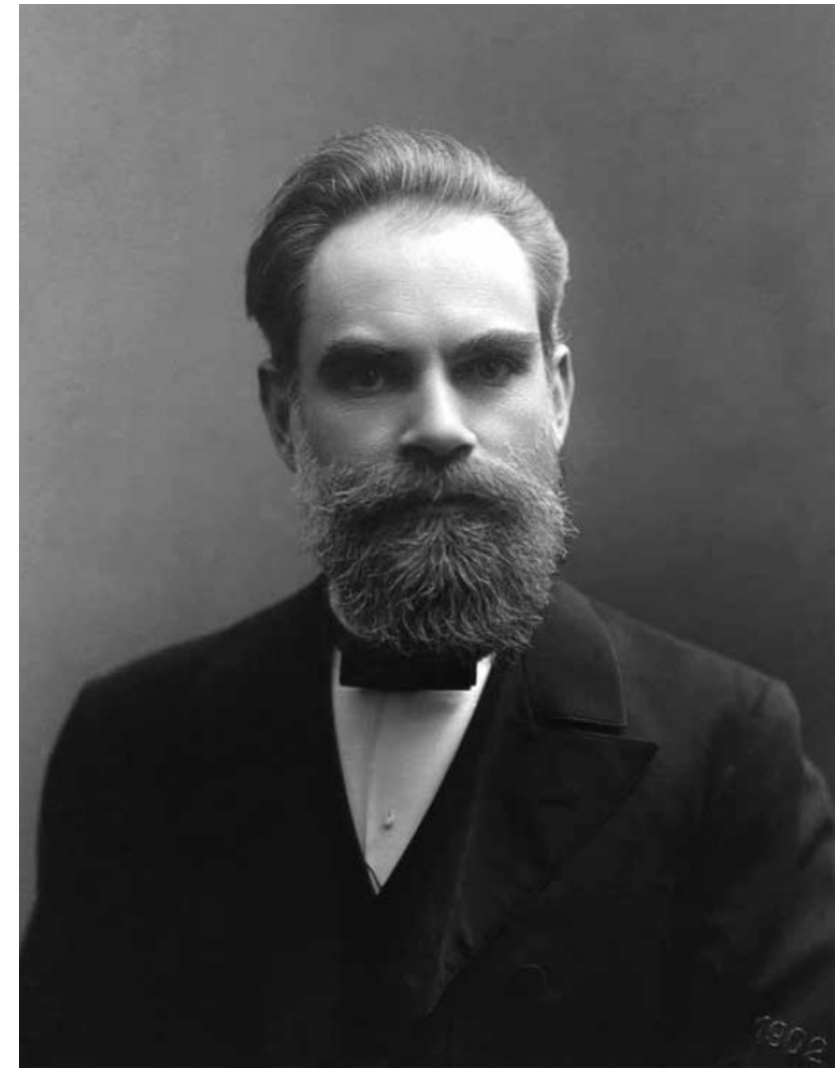
Giuseppe Ludovico De la Grange Tournier



Lagrange Stability

the motion is finite -
is bounded in phase space -
“Global Stability”

Giuseppe Ludovico De la Grange Tournier



Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

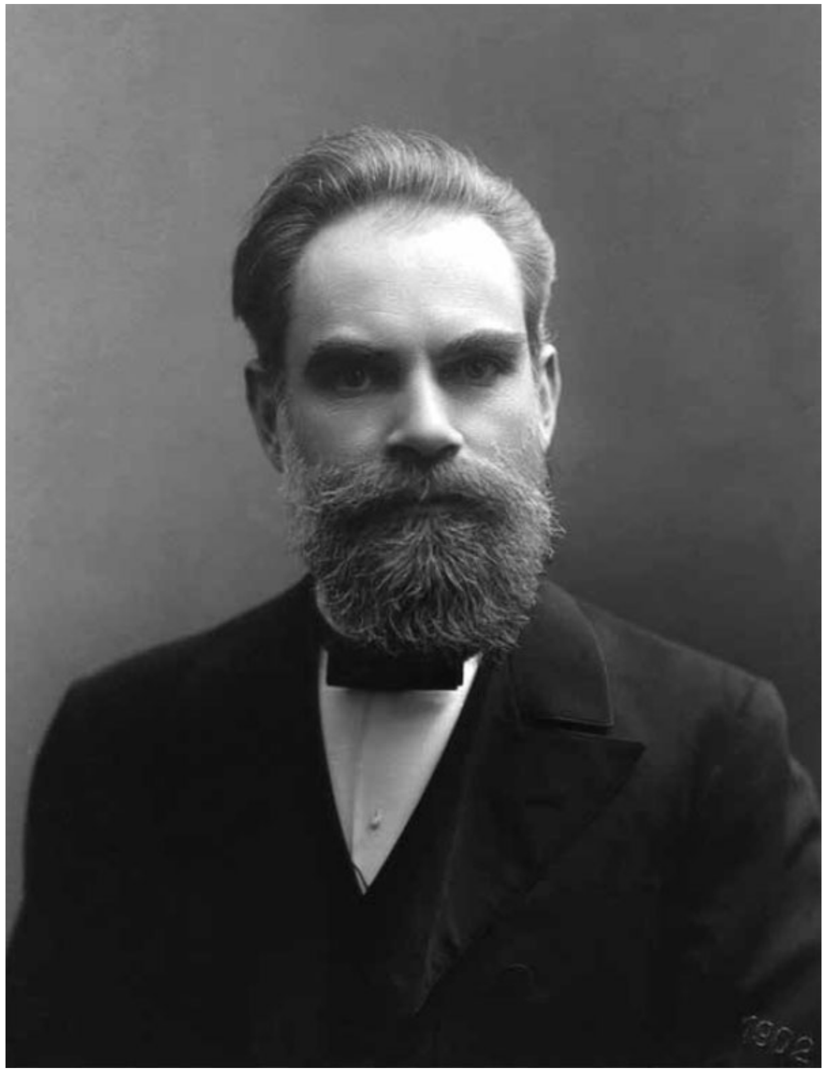
Lagrange Stability

the motion is finite -
is bounded in phase space -
“Global Stability”

Giuseppe Ludovico De la Grange Tournier

Lagrange Stability

the motion is finite -
is bounded in phase space -
“Global Stability”



Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

Lyapunov Stability

means that solutions starting "close enough" (within a distance δ from each other) remain "close enough" forever (within a distance ϵ from it).

Ostrogradsky Theorem

Ostrogradsky Theorem

modern version for poor people

Ostrogradsky Theorem

modern version for poor people

$$\frac{1}{M^2 p^2 - p^4}$$

propagator

Ostrogradsky Theorem

modern version for poor people

$$\frac{1}{M^2p^2 - p^4} = \frac{1}{M^2}\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - M^2}\right]$$

propagator

Ostrogradsky Theorem

modern version for poor people

$$\frac{1}{M^2p^2 - p^4} = \frac{1}{M^2}\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - M^2}\right]$$

propagator

Ostrogradsky Theorem

Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky

modern version for poor people

$$\frac{1}{M^2 p^2 - p^4} = \frac{1}{M^2}\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - M^2}\right]$$

propagator

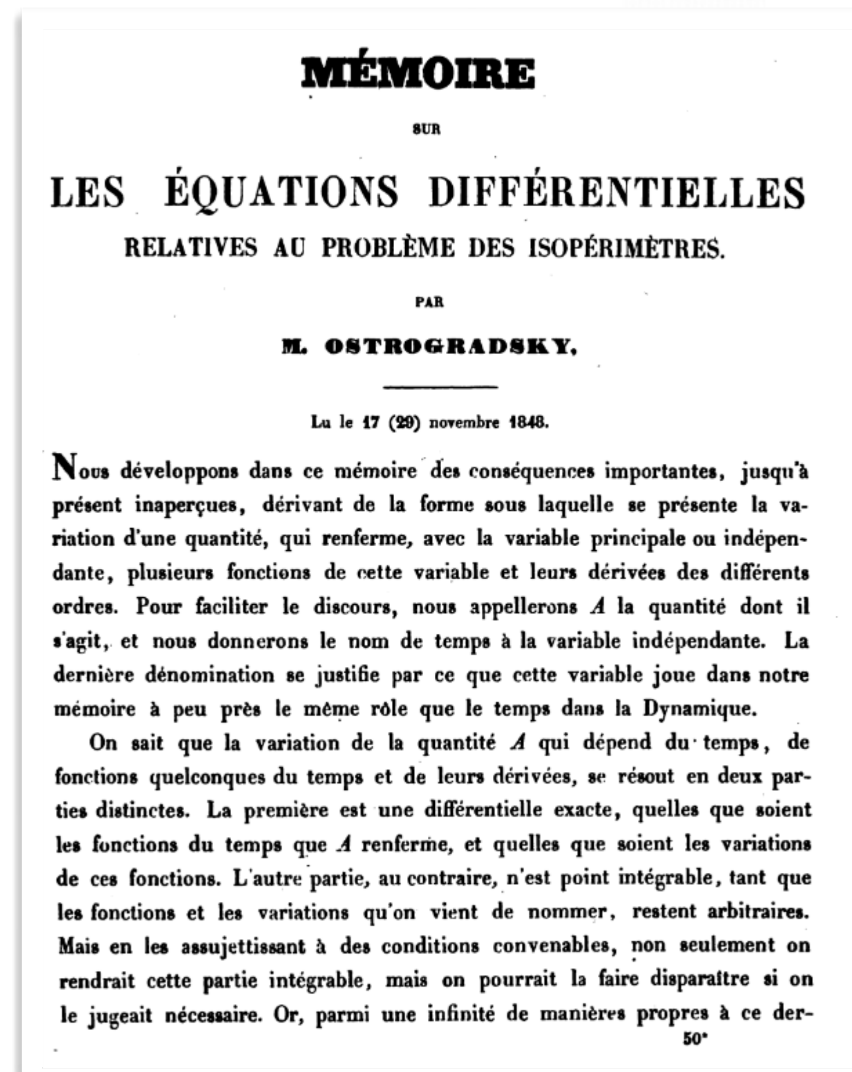
Ostrogradsky Theorem

modern version for poor people

$$\frac{1}{M^2p^2 - p^4} = \frac{1}{M^2}\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - M^2}\right]$$

propagator

Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky



MÉMOIRE

SUR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RELATIVES AU PROBLÈME DES ISOPÉRIMÈTRES.

PAR

M. OSTROGRADSKY.

Lu le 17 (29) novembre 1848.

Nous développons dans ce mémoire des conséquences importantes, jusqu'à présent inaperçues, dérivant de la forme sous laquelle se présente la variation d'une quantité, qui renferme, avec la variable principale ou indépendante, plusieurs fonctions de cette variable et leurs dérivées des différents ordres. Pour faciliter le discours, nous appellerons A la quantité dont il s'agit, et nous donnerons le nom de temps à la variable indépendante. La dernière dénomination se justifie par ce que cette variable joue dans notre mémoire à peu près le même rôle que le temps dans la Dynamique.

On sait que la variation de la quantité A qui dépend du temps, de fonctions quelconques du temps et de leurs dérivées, se résout en deux parties distinctes. La première est une différentielle exacte, quelles que soient les fonctions du temps que A renferme, et quelles que soient les variations de ces fonctions. L'autre partie, au contraire, n'est point intégrable, tant que les fonctions et les variations qu'on vient de nommer, restent arbitraires. Mais en les assujettissant à des conditions convenables, non seulement on rendrait cette partie intégrable, mais on pourrait la faire disparaître si on le jugeait nécessaire. Or, parmi une infinité de manières propres à ce der-

50*

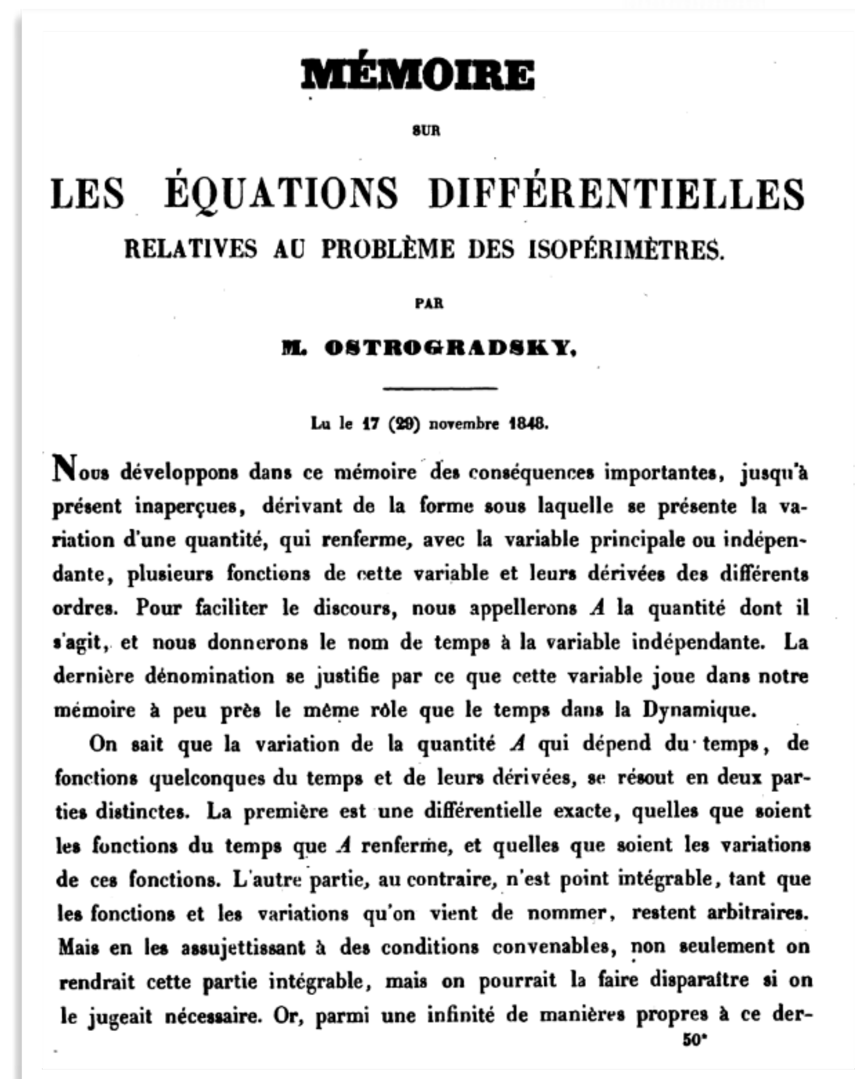
Ostrogradsky Theorem

modern version for poor people

$$\frac{1}{M^2p^2 - p^4} = \frac{1}{M^2}\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - M^2}\right]$$

propagator

Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky



MÉMOIRE

SUR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RELATIVES AU PROBLÈME DES ISOPÉRIMÈTRES.

PAR

M. OSTROGRADSKY.

Lu le 17 (29) novembre 1848.

Nous développons dans ce mémoire des conséquences importantes, jusqu'à présent inaperçues, dérivant de la forme sous laquelle se présente la variation d'une quantité, qui renferme, avec la variable principale ou indépendante, plusieurs fonctions de cette variable et leurs dérivées des différents ordres. Pour faciliter le discours, nous appellerons A la quantité dont il s'agit, et nous donnerons le nom de temps à la variable indépendante. La dernière dénomination se justifie par ce que cette variable joue dans notre mémoire à peu près le même rôle que le temps dans la Dynamique.

On sait que la variation de la quantité A qui dépend du temps, de fonctions quelconques du temps et de leurs dérivées, se résout en deux parties distinctes. La première est une différentielle exacte, quelles que soient les fonctions du temps que A renferme, et quelles que soient les variations de ces fonctions. L'autre partie, au contraire, n'est point intégrable, tant que les fonctions et les variations qu'on vient de nommer, restent arbitraires. Mais en les assujettissant à des conditions convenables, non seulement on rendrait cette partie intégrable, mais on pourrait la faire disparaître si on le jugeait nécessaire. Or, parmi une infinité de manières propres à ce der-

50*

Ostrogradsky Theorem

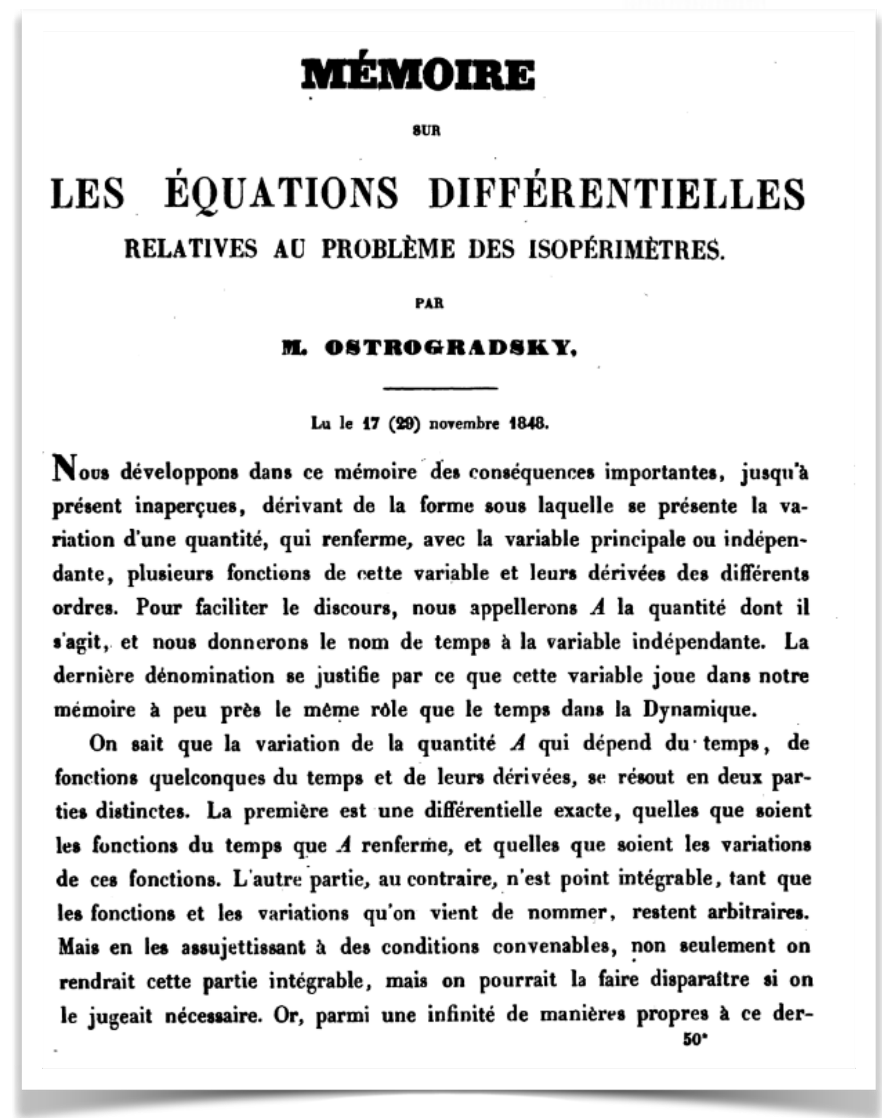
modern version for poor people

$$\frac{1}{M^2p^2 - p^4} = \frac{1}{M^2}\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - M^2}\right]$$

propagator

For Lagrangian $L\left(q, \dot{q}, \ddot{q}\right)$ depending on acceleration $a = \ddot{q}$

Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky



MÉMOIRE

SUR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RELATIVES AU PROBLÈME DES ISOPÉRIMÈTRES.

PAR

M. OSTROGRADSKY.

Lu le 17 (29) novembre 1848.

Nous développons dans ce mémoire des conséquences importantes, jusqu'à présent inaperçues, dérivant de la forme sous laquelle se présente la variation d'une quantité, qui renferme, avec la variable principale ou indépendante, plusieurs fonctions de cette variable et leurs dérivées des différents ordres. Pour faciliter le discours, nous appellerons A la quantité dont il s'agit, et nous donnerons le nom de temps à la variable indépendante. La dernière dénomination se justifie par ce que cette variable joue dans notre mémoire à peu près le même rôle que le temps dans la Dynamique.

On sait que la variation de la quantité A qui dépend du temps, de fonctions quelconques du temps et de leurs dérivées, se résout en deux parties distinctes. La première est une différentielle exacte, quelles que soient les fonctions du temps que A renferme, et quelles que soient les variations de ces fonctions. L'autre partie, au contraire, n'est point intégrable, tant que les fonctions et les variations qu'on vient de nommer, restent arbitraires. Mais en les assujettissant à des conditions convenables, non seulement on rendrait cette partie intégrable, mais on pourrait la faire disparaître si on le jugeait nécessaire. Or, parmi une infinité de manières propres à ce der-

50*

Ostrogradsky Theorem

modern version for poor people

$$\frac{1}{M^2p^2 - p^4} = \frac{1}{M^2}\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - M^2}\right]$$

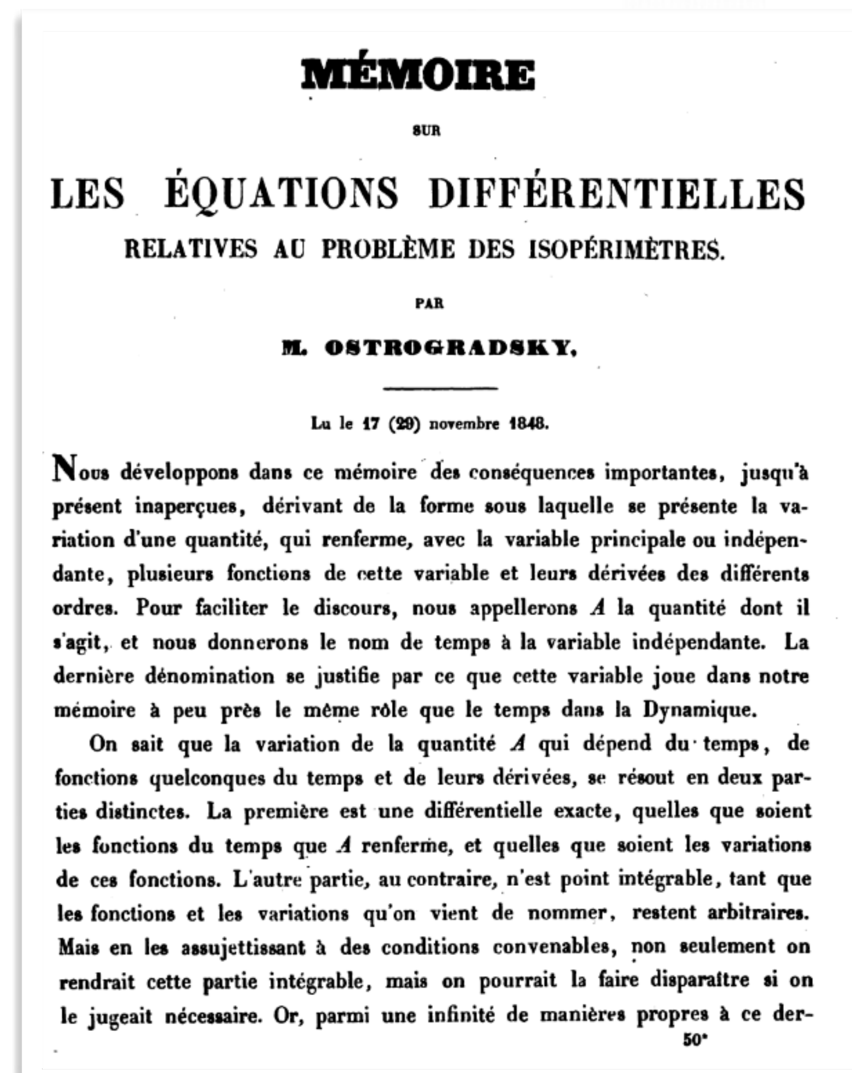
propagator

For Lagrangian $L\left(q, \dot{q}, \ddot{q}\right)$ depending on acceleration $a = \ddot{q}$

canonical momentum for $Q_1 = q$

$$P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}$$

Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky



MÉMOIRE

SUR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RELATIVES AU PROBLÈME DES ISOPÉRIMÈTRES.

PAR

M. OSTROGRADSKY.

Lu le 17 (29) novembre 1848.

Nous développons dans ce mémoire des conséquences importantes, jusqu'à présent inaperçues, dérivant de la forme sous laquelle se présente la variation d'une quantité, qui renferme, avec la variable principale ou indépendante, plusieurs fonctions de cette variable et leurs dérivées des différents ordres. Pour faciliter le discours, nous appellerons A la quantité dont il s'agit, et nous donnerons le nom de temps à la variable indépendante. La dernière dénomination se justifie par ce que cette variable joue dans notre mémoire à peu près le même rôle que le temps dans la Dynamique.

On sait que la variation de la quantité A qui dépend du temps, de fonctions quelconques du temps et de leurs dérivées, se résout en deux parties distinctes. La première est une différentielle exacte, quelles que soient les fonctions du temps que A renferme, et quelles que soient les variations de ces fonctions. L'autre partie, au contraire, n'est point intégrable, tant que les fonctions et les variations qu'on vient de nommer, restent arbitraires. Mais en les assujettissant à des conditions convenables, non seulement on rendrait cette partie intégrable, mais on pourrait la faire disparaître si on le jugeait nécessaire. Or, parmi une infinité de manières propres à ce der-

50*

Ostrogradsky Theorem

modern version for poor people

$$\frac{1}{M^2p^2 - p^4} = \frac{1}{M^2}\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - M^2}\right]$$

propagator

For Lagrangian $L\left(q,\dot{q},\ddot{q}\right)$ depending on acceleration $a = \ddot{q}$

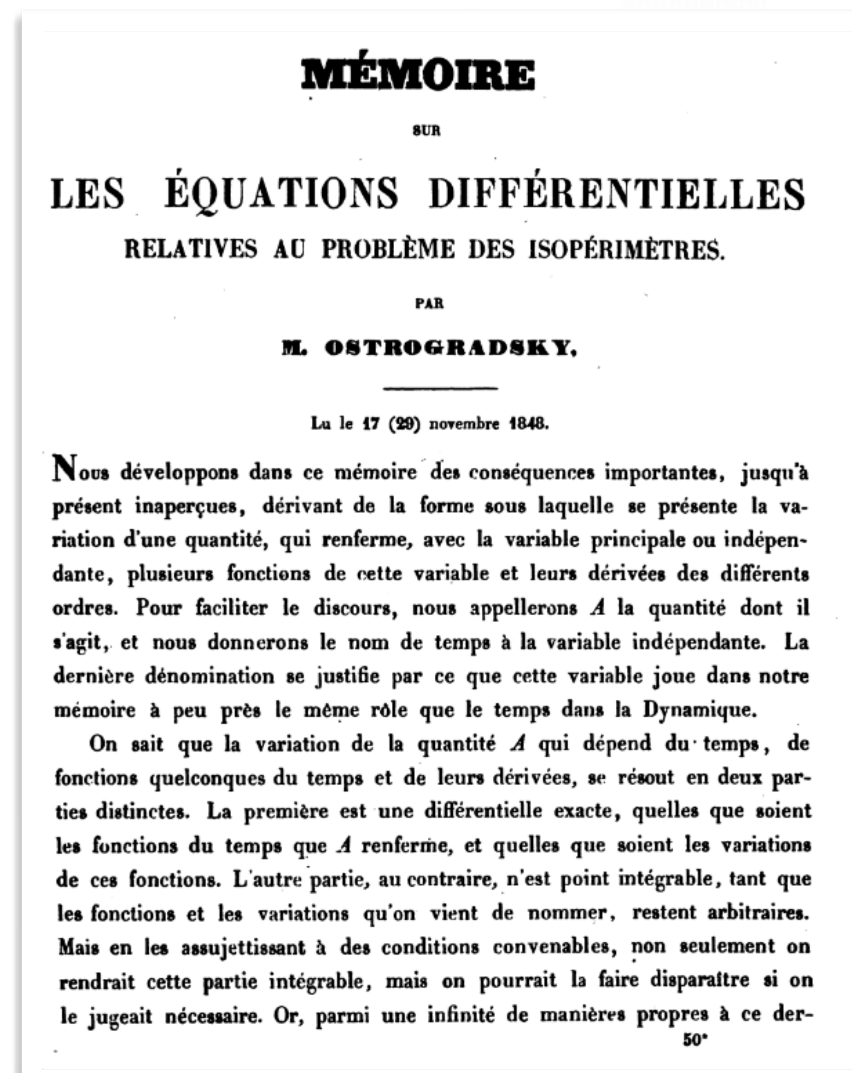
canonical momentum for $Q_1 = q$

$$P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}$$

canonical momentum for $Q_2 = \dot{q}$

$$P_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}$$

Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky



MÉMOIRE

SUR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RELATIVES AU PROBLÈME DES ISOPÉRIMÈTRES.

PAR

M. OSTROGRADSKY.

Lu le 17 (29) novembre 1848.

Nous développons dans ce mémoire des conséquences importantes, jusqu'à présent inaperçues, dérivant de la forme sous laquelle se présente la variation d'une quantité, qui renferme, avec la variable principale ou indépendante, plusieurs fonctions de cette variable et leurs dérivées des différents ordres. Pour faciliter le discours, nous appellerons *A* la quantité dont il s'agit, et nous donnerons le nom de temps à la variable indépendante. La dernière dénomination se justifie par ce que cette variable joue dans notre mémoire à peu près le même rôle que le temps dans la Dynamique.

On sait que la variation de la quantité *A* qui dépend du temps, de fonctions quelconques du temps et de leurs dérivées, se résout en deux parties distinctes. La première est une différentielle exacte, quelles que soient les fonctions du temps que *A* renferme, et quelles que soient les variations de ces fonctions. L'autre partie, au contraire, n'est point intégrable, tant que les fonctions et les variations qu'on vient de nommer, restent arbitraires. Mais en les assujettissant à des conditions convenables, non seulement on rendrait cette partie intégrable, mais on pourrait la faire disparaître si on le jugeait nécessaire. Or, parmi une infinité de manières propres à ce der-

50*

Ostrogradsky Theorem

modern version for poor people

$$\frac{1}{M^2p^2 - p^4} = \frac{1}{M^2}\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - M^2}\right]$$

propagator

For Lagrangian $L\left(q, \dot{q}, \ddot{q}\right)$ depending on acceleration $a = \ddot{q}$

canonical momentum for $Q_1 = q$

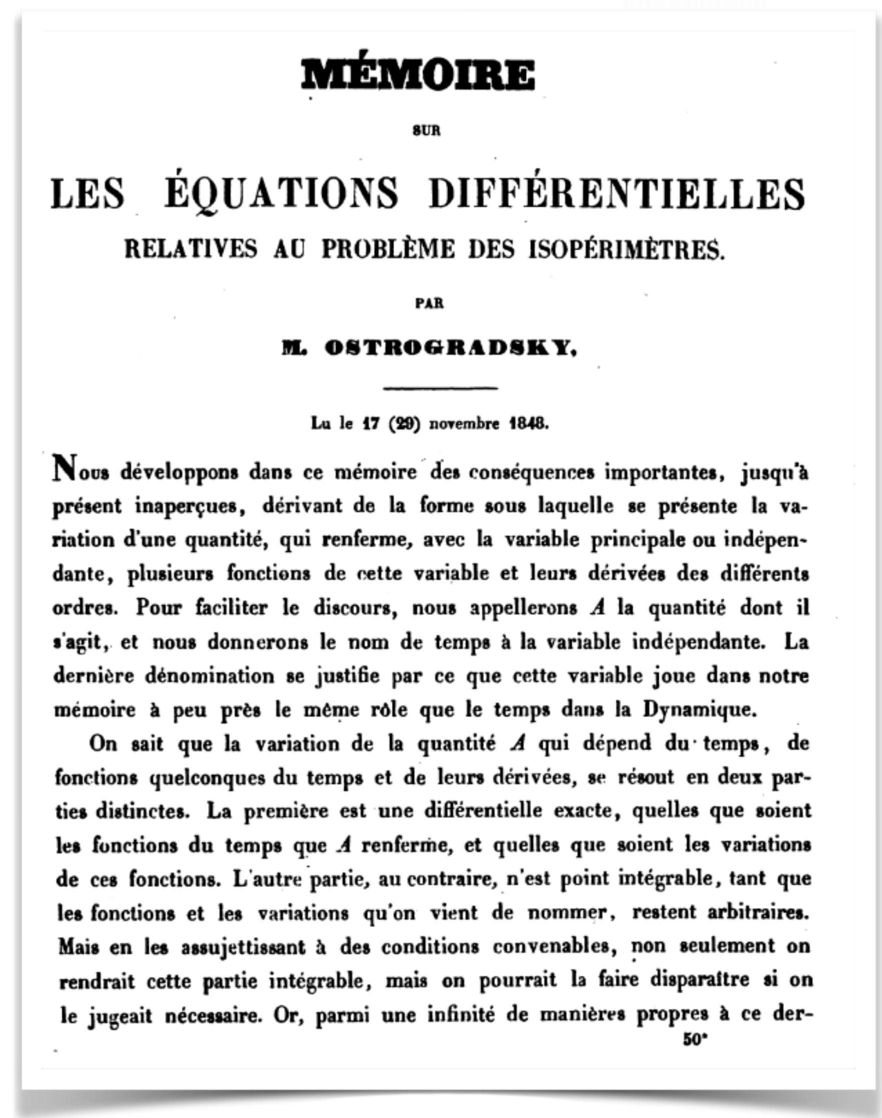
$$P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}$$

canonical momentum for $Q_2 = \dot{q}$

$$P_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}$$

$$H = P_1\dot{Q}_1 + P_2\dot{Q}_2 - L$$

Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky



MÉMOIRE

SUR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RELATIVES AU PROBLÈME DES ISOPÉRIMÈTRES.

PAR

M. OSTROGRADSKY.

Lu le 17 (29) novembre 1848.

Nous développons dans ce mémoire des conséquences importantes, jusqu'à présent inaperçues, dérivant de la forme sous laquelle se présente la variation d'une quantité, qui renferme, avec la variable principale ou indépendante, plusieurs fonctions de cette variable et leurs dérivées des différents ordres. Pour faciliter le discours, nous appellerons A la quantité dont il s'agit, et nous donnerons le nom de temps à la variable indépendante. La dernière dénomination se justifie par ce que cette variable joue dans notre mémoire à peu près le même rôle que le temps dans la Dynamique.

On sait que la variation de la quantité A qui dépend du temps, de fonctions quelconques du temps et de leurs dérivées, se résout en deux parties distinctes. La première est une différentielle exacte, quelles que soient les fonctions du temps que A renferme, et quelles que soient les variations de ces fonctions. L'autre partie, au contraire, n'est point intégrable, tant que les fonctions et les variations qu'on vient de nommer, restent arbitraires. Mais en les assujettissant à des conditions convenables, non seulement on rendrait cette partie intégrable, mais on pourrait la faire disparaître si on le jugeait nécessaire. Or, parmi une infinité de manières propres à ce der-

50*

Ostrogradsky Theorem

modern version for poor people

$$\frac{1}{M^2p^2 - p^4} = \frac{1}{M^2}\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - M^2}\right]$$

propagator

For Lagrangian $L\left(q, \dot{q}, \ddot{q}\right)$ depending on acceleration $a = \ddot{q}$

canonical momentum for $Q_1 = q$

$$P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}$$

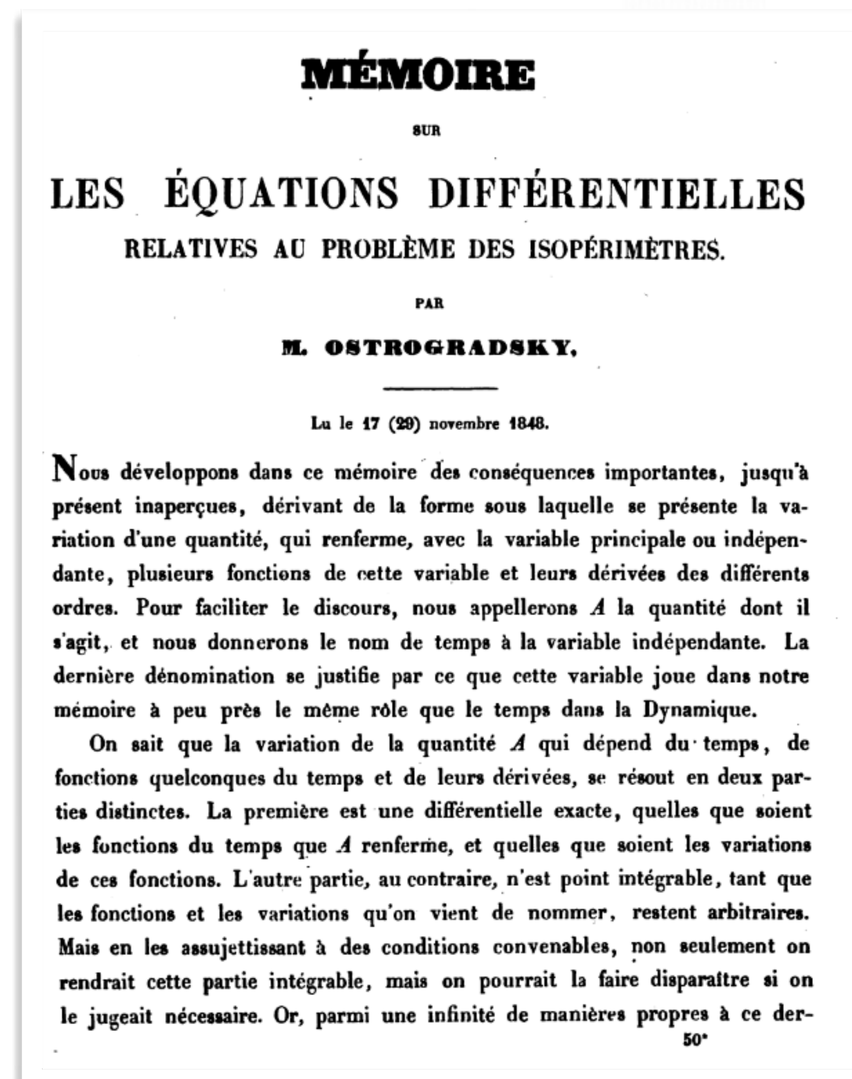
canonical momentum for $Q_2 = \dot{q}$

$$P_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}$$

$$H = P_1\dot{Q}_1 + P_2\dot{Q}_2 - L$$

$$H = P_1Q_2 + P_2a\left(P_2, Q_1, Q_2\right) - L\left(Q_1, Q_2, a\left(P_2, Q_1, Q_2\right)\right)$$

Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky



MÉMOIRE

SUR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RELATIVES AU PROBLÈME DES ISOPÉRIMÈTRES.

PAR

M. OSTROGRADSKY.

Lu le 17 (29) novembre 1848.

Nous développons dans ce mémoire des conséquences importantes, jusqu'à présent inaperçues, dérivant de la forme sous laquelle se présente la variation d'une quantité, qui renferme, avec la variable principale ou indépendante, plusieurs fonctions de cette variable et leurs dérivées des différents ordres. Pour faciliter le discours, nous appellerons A la quantité dont il s'agit, et nous donnerons le nom de temps à la variable indépendante. La dernière dénomination se justifie par ce que cette variable joue dans notre mémoire à peu près le même rôle que le temps dans la Dynamique.

On sait que la variation de la quantité A qui dépend du temps, de fonctions quelconques du temps et de leurs dérivées, se résout en deux parties distinctes. La première est une différentielle exacte, quelles que soient les fonctions du temps que A renferme, et quelles que soient les variations de ces fonctions. L'autre partie, au contraire, n'est point intégrable, tant que les fonctions et les variations qu'on vient de nommer, restent arbitraires. Mais en les assujettissant à des conditions convenables, non seulement on rendrait cette partie intégrable, mais on pourrait la faire disparaître si on le jugeait nécessaire. Or, parmi une infinité de manières propres à ce der-

50*

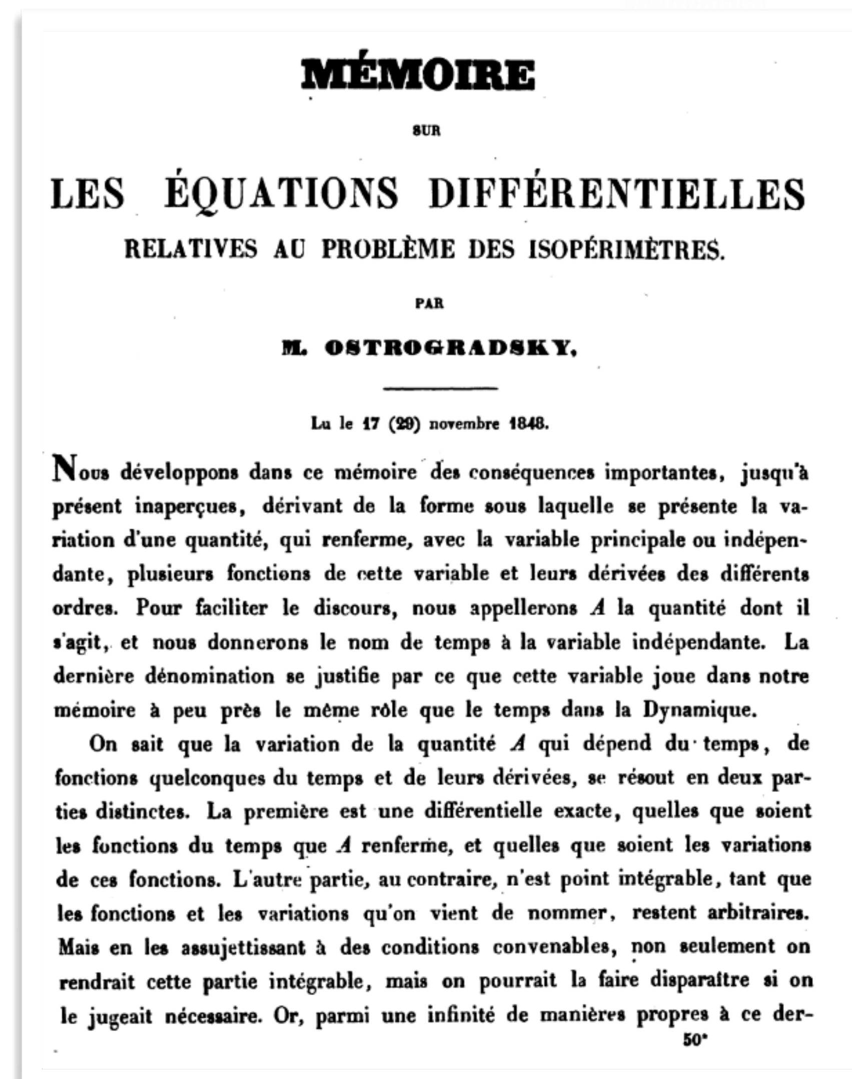
Ostrogradsky Theorem

modern version for poor people

$$\frac{1}{M^2p^2 - p^4} = \frac{1}{M^2}\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - M^2}\right]$$

propagator

Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky



MÉMOIRE

SUR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RELATIVES AU PROBLÈME DES ISOPÉRIMÈTRES.

PAR

M. OSTROGRADSKY.

Lu le 17 (29) novembre 1848.

Nous développons dans ce mémoire des conséquences importantes, jusqu'à présent inaperçues, dérivant de la forme sous laquelle se présente la variation d'une quantité, qui renferme, avec la variable principale ou indépendante, plusieurs fonctions de cette variable et leurs dérivées des différents ordres. Pour faciliter le discours, nous appellerons A la quantité dont il s'agit, et nous donnerons le nom de temps à la variable indépendante. La dernière dénomination se justifie par ce que cette variable joue dans notre mémoire à peu près le même rôle que le temps dans la Dynamique.

On sait que la variation de la quantité A qui dépend du temps, de fonctions quelconques du temps et de leurs dérivées, se résout en deux parties distinctes. La première est une différentielle exacte, quelles que soient les fonctions du temps que A renferme, et quelles que soient les variations de ces fonctions. L'autre partie, au contraire, n'est point intégrable, tant que les fonctions et les variations qu'on vient de nommer, restent arbitraires. Mais en les assujettissant à des conditions convenables, non seulement on rendrait cette partie intégrable, mais on pourrait la faire disparaître si on le jugeait nécessaire. Or, parmi une infinité de manières propres à ce der-

50*

For Lagrangian $L\left(q,\dot{q},\ddot{q}\right)$ depending on acceleration $a = \ddot{q}$

canonical momentum for $Q_1 = q$

$$P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}$$

canonical momentum for $Q_2 = \dot{q}$

$$P_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}$$

$$H = P_1\dot{Q}_1 + P_2\dot{Q}_2 - L$$

$$H = P_1Q_2 + P_2a\left(P_2,Q_1,Q_2\right) - L\left(Q_1,Q_2,a\left(P_2,Q_1,Q_2\right)\right)$$

Hamiltonian linear in P_1 - unbounded from above and from below!

Mechanical analogy

Mechanical analogy

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

Mechanical analogy

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

e.g. action for cosmological perturbations

$$S\left[\mathcal{R}\right] = \frac{1}{2}\int d\tau d^3\mathbf{x}\, Z\left(\left(\mathcal{R}'\right)^2 - c_{\mathrm{S}}^2\left(\partial_i\mathcal{R}\right)^2\right)$$

Mechanical analogy

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

e.g. action for cosmological perturbations

$$S\left[\mathcal{R}\right] = \frac{1}{2}\int d\tau d^3\mathbf{x}\, Z\left(\left(\mathcal{R}'\right)^2 - c_{\mathrm{S}}^2\left(\partial_i\mathcal{R}\right)^2\right)$$

$$H_{\mathbf{k}} = \frac{\left|P_{\mathbf{k}}\right|^2}{2Z} + \frac{Z c_S^2 k^2 \left|\mathcal{R}_{\mathbf{k}}\right|^2}{2}$$

Mechanical analogy

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

e.g. action for cosmological perturbations

$$S\left[\mathcal{R}\right] = \frac{1}{2}\int d\tau d^3\mathbf{x}\, Z\left(\left(\mathcal{R}'\right)^2 - c_{\mathrm{S}}^2\left(\partial_i \mathcal{R}\right)^2\right)$$

$$H_{\mathbf{k}} = \frac{\left|P_{\mathbf{k}}\right|^2}{2Z} + \frac{Z c_S^2 k^2 \left|\mathcal{R}_{\mathbf{k}}\right|^2}{2}$$

$$Z \leftrightarrow m$$

Mechanical analogy

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

e.g. action for cosmological perturbations

$$S\left[\mathcal{R}\right] = \frac{1}{2}\int d\tau d^3\mathbf{x}\, Z\left(\left(\mathcal{R}'\right)^2 - c_{\mathrm{S}}^2\left(\partial_i \mathcal{R}\right)^2\right)$$

$$H_{\mathbf{k}} = \frac{\left|P_{\mathbf{k}}\right|^2}{2Z} + \frac{Z c_S^2 k^2 \left|\mathcal{R}_{\mathbf{k}}\right|^2}{2}$$

$$Z \leftrightarrow m \qquad \omega^2 \leftrightarrow c_s^2 k^2$$

Ghosts and gradient instabilities

Ghosts and gradient instabilities

$$S\left[\mathcal{R}\right]=\frac{1}{2}\int d\tau d^3\mathbf{x}\,Z\left(\left(\mathcal{R}'\right)^2-c_{\mathrm{S}}^2\left(\partial_i\mathcal{R}\right)^2\right)$$

Ghosts and gradient instabilities

$$S\left[\mathcal{R}\right] = \frac{1}{2}\int d\tau d^3\mathbf{x}\, Z\left(\left(\mathcal{R}'\right)^2 - c_{\mathrm{S}}^2\left(\partial_i \mathcal{R}\right)^2\right)$$

$$H_{\mathbf{k}} = \frac{\left|P_{\mathbf{k}}\right|^2}{2Z} + \frac{Z c_S^2 k^2 \left|\mathcal{R}_{\mathbf{k}}\right|^2}{2}$$

Ghosts and gradient instabilities

$$S\left[\mathcal{R}\right] = \frac{1}{2}\int d\tau d^3\mathbf{x}\, Z\left(\left(\mathcal{R}'\right)^2 - c_{\mathrm{S}}^2\left(\partial_i\mathcal{R}\right)^2\right)$$

$$H_{\mathbf{k}} = \frac{\left|P_{\mathbf{k}}\right|^2}{2Z} + \frac{Z c_S^2 k^2 \left|\mathcal{R}_{\mathbf{k}}\right|^2}{2}$$

Gradient instability $c_s^2 < 0$

Ghosts and gradient instabilities

$$S\left[\mathcal{R}\right] = \frac{1}{2}\int d\tau d^3\mathbf{x}\, Z\left(\left(\mathcal{R}'\right)^2 - c_{\mathrm{S}}^2\left(\partial_i\mathcal{R}\right)^2\right)$$

$$H_{\mathbf{k}} = \frac{\left|P_{\mathbf{k}}\right|^2}{2Z} + \frac{Z c_S^2 k^2 \left|\mathcal{R}_{\mathbf{k}}\right|^2}{2}$$

$$R_{\mathbf{k}} \sim \exp\left(\left|c_s\right| k\tau\right)$$

Gradient instability $c_s^2 < 0$

Ghosts and gradient instabilities

$$S\left[\mathcal{R}\right] = \frac{1}{2}\int d\tau d^3\mathbf{x}\, Z\left(\left(\mathcal{R}'\right)^2 - c_{\mathrm{S}}^2\left(\partial_i \mathcal{R}\right)^2\right)$$

$$H_{\mathbf{k}} = \frac{\left|P_{\mathbf{k}}\right|^2}{2Z} + \frac{Z c_S^2 k^2 \left|\mathcal{R}_{\mathbf{k}}\right|^2}{2}$$

$$R_{\mathbf{k}} \sim \exp\left(\left|c_s\right| k\tau\right)$$

Gradient instability $c_s^2 < 0$

ghost $Z(t) < 0$

Ghosts and gradient instabilities

$$S\left[\mathcal{R}\right]=\frac{1}{2}\int d\tau d^{3}\mathbf{x}\,Z\left(\left(\mathcal{R}'\right)^{2}-c_{\mathrm{S}}^{2}\left(\partial_{i}\mathcal{R}\right)^{2}\right)$$

$$H_{\mathbf{k}}=\frac{\left|P_{\mathbf{k}}\right|^{2}}{2Z}+\frac{Zc_{S}^{2}k^{2}\left|\mathcal{R}_{\mathbf{k}}\right|^{2}}{2}$$

$$R_{\mathbf{k}}\sim\exp\left(\left|c_{s}\right|k\tau\right)$$

Gradient instability $c_s^2 < 0$

ghost $Z(t) < 0$

*ghosts - modes (oscillators) with the **negative mass***

Ghosts and gradient instabilities

$$S\left[\mathcal{R}\right]=\frac{1}{2}\int d\tau d^{3}\mathbf{x}\,Z\left(\left(\mathcal{R}'\right)^{2}-c_{\mathrm{S}}^{2}\left(\partial_{i}\mathcal{R}\right)^{2}\right)$$

$$H_{\mathbf{k}}=\frac{\left|P_{\mathbf{k}}\right|^{2}}{2Z}+\frac{Zc_{S}^{2}k^{2}\left|\mathcal{R}_{\mathbf{k}}\right|^{2}}{2}$$

$$R_{\mathbf{k}}\sim\exp\left(\left|c_{s}\right|k\tau\right)$$

Gradient instability $c_{s}^{2}<0$

ghost $Z(t)<0$

ghosts - modes (oscillators) with the ***negative mass***

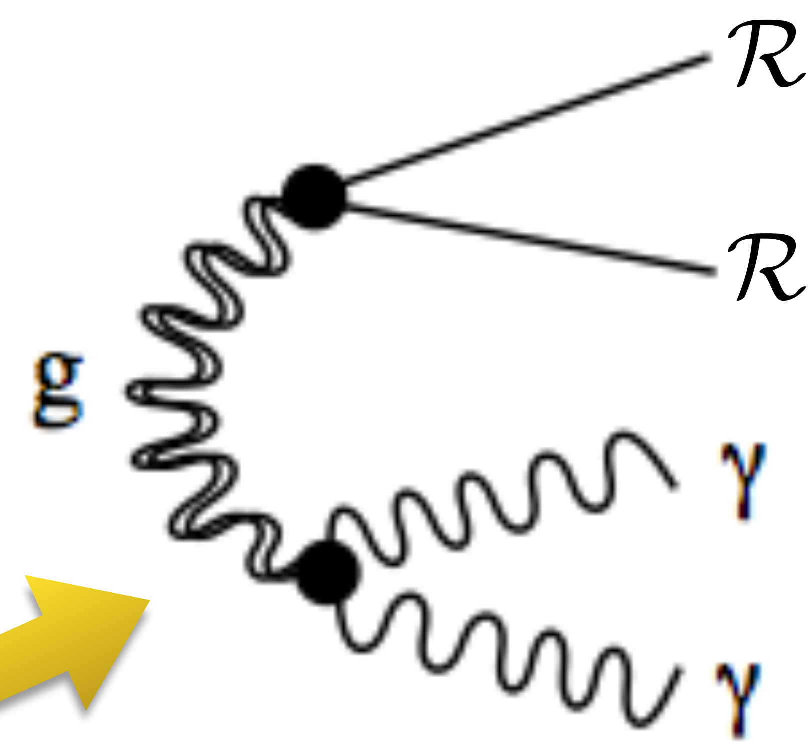
Ghosts and gradient instabilities

$$S\left[\mathcal{R}\right] = \frac{1}{2}\int d\tau d^3\mathbf{x}\, Z \left(\left(\mathcal{R}'\right)^2 - c_{\mathrm{S}}^2 \left(\partial_i \mathcal{R}\right)^2\right)$$

$$H_{\mathbf{k}} = \frac{\left|P_{\mathbf{k}}\right|^2}{2Z} + \frac{Z c_S^2 k^2 \left|\mathcal{R}_{\mathbf{k}}\right|^2}{2}$$

$$R_{\mathbf{k}} \sim \exp\left(\left|c_s\right| k\tau\right)$$

Gradient instability $c_s^2 < 0$



ghost $Z(t) < 0$

*ghosts - modes (oscillators) with the **negative mass***

$$\Gamma_{0\to 2\gamma 2\phi} \sim \frac{\Lambda^8}{M_{\mathrm{Pl}}^4}$$

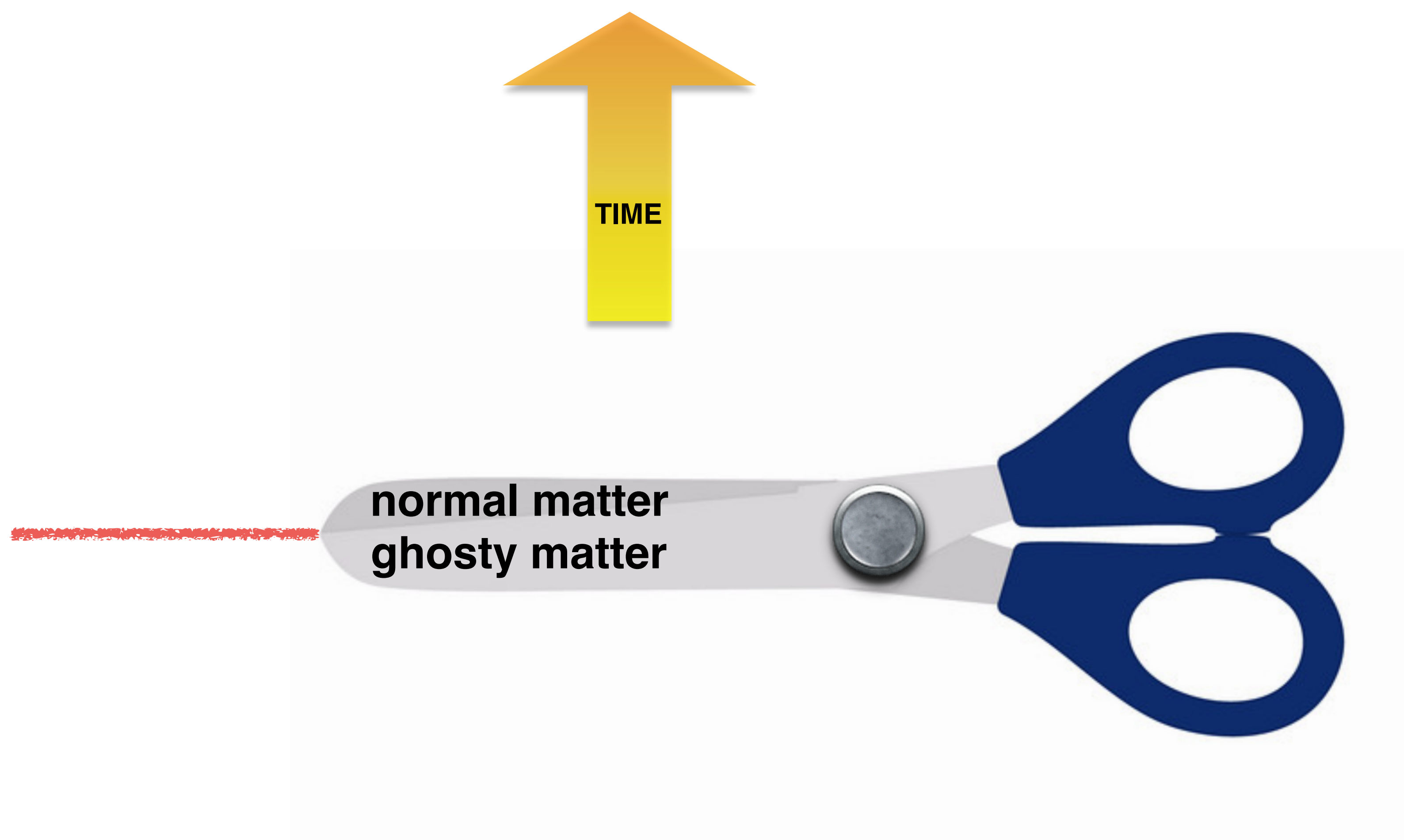
Cline, Jeon, Moore, (2003)

Instability

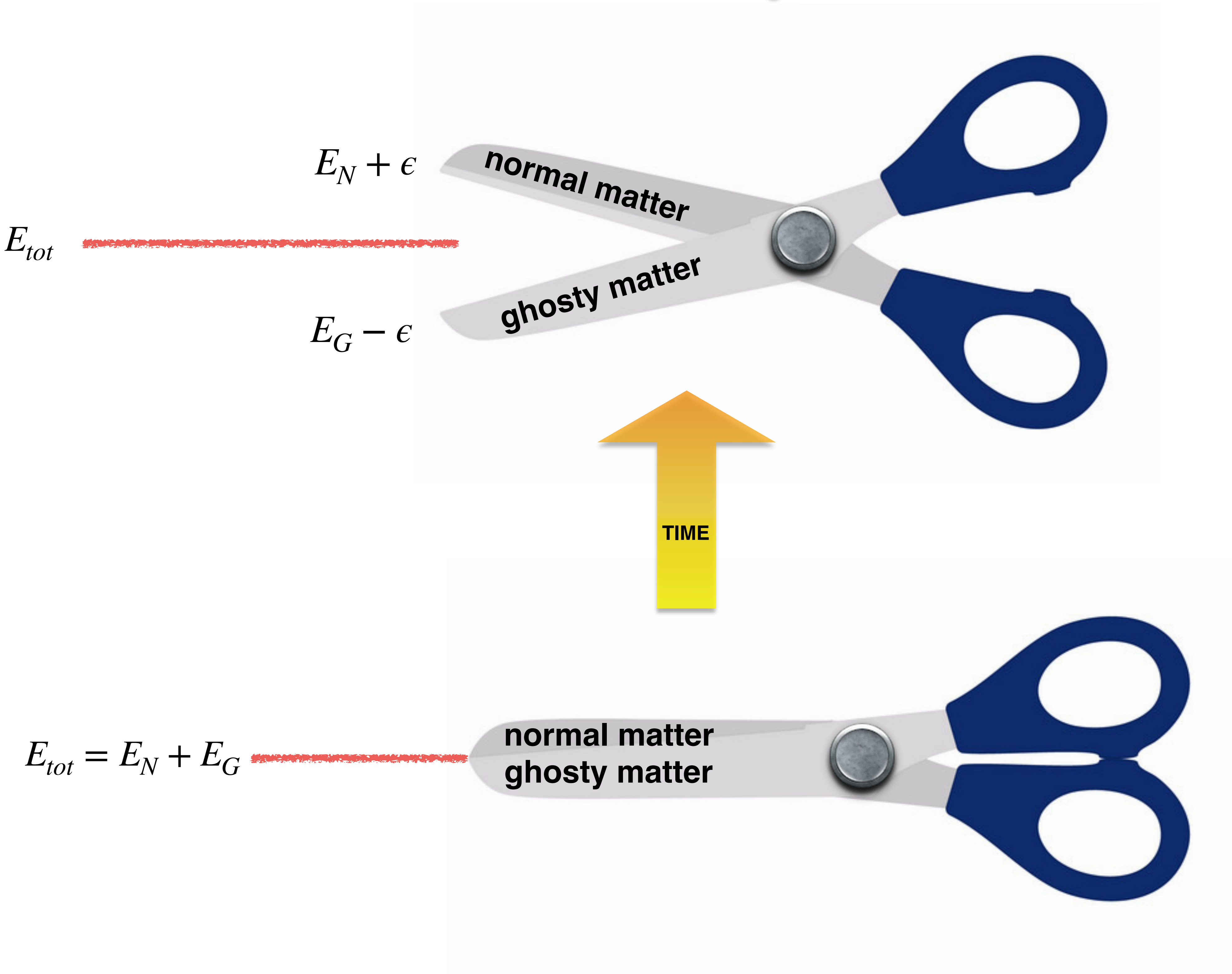
$$E_{tot} = E_N + E_G$$

Instability

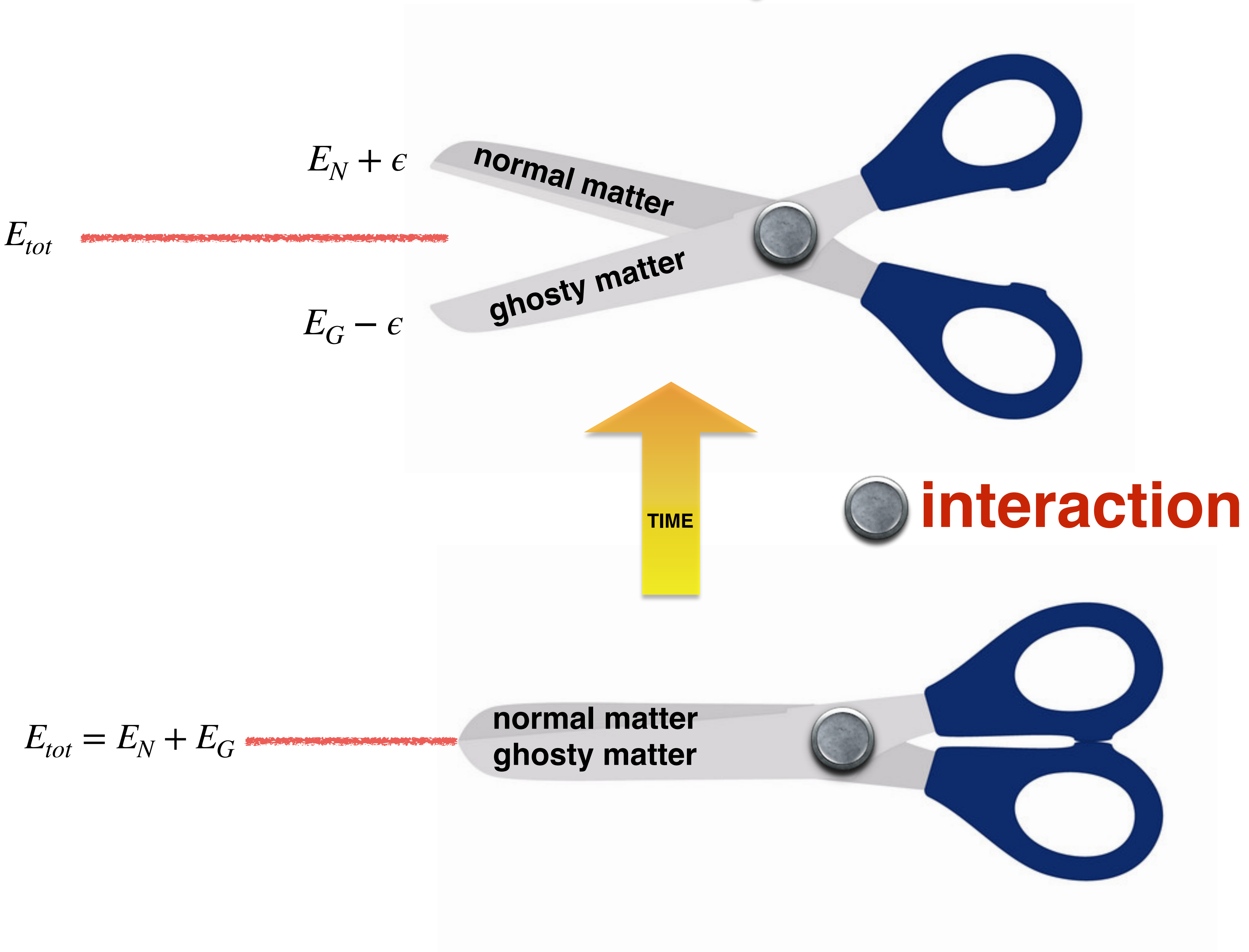
$E_{tot} = E_N + E_G$



Instability



Instability



How Unstable?

How Unstable?

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{Q^2}{2}$$

How Unstable?

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{Q^2}{2}$$

$$-\left(\frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}\right)$$

How Unstable?

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{Q^2}{2}$$

$$-\left(\frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}\right)$$

How Unstable?

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{Q^2}{2} - \left(\frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} \right) + \frac{\lambda}{2} q^2 Q^2$$

How Unstable?

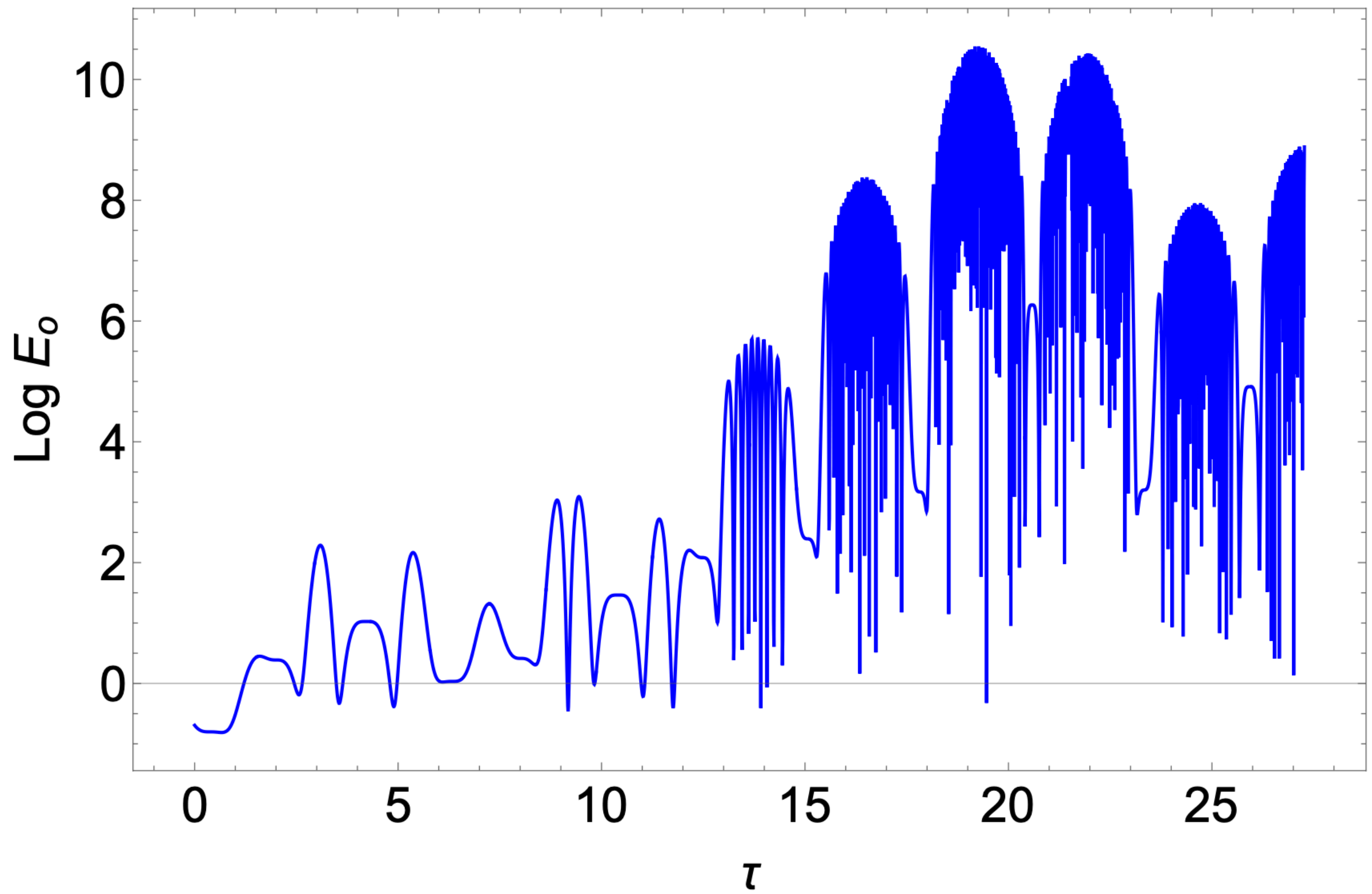


Figure 2: The growth of the logarithm of the energy of the observer is depicted for $\lambda = 4$, $\omega = 2.3$ and vacuum initial data (8) and (9).

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{Q^2}{2} - \left(\frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}\right) + \frac{\lambda}{2} q^2 Q^2$$

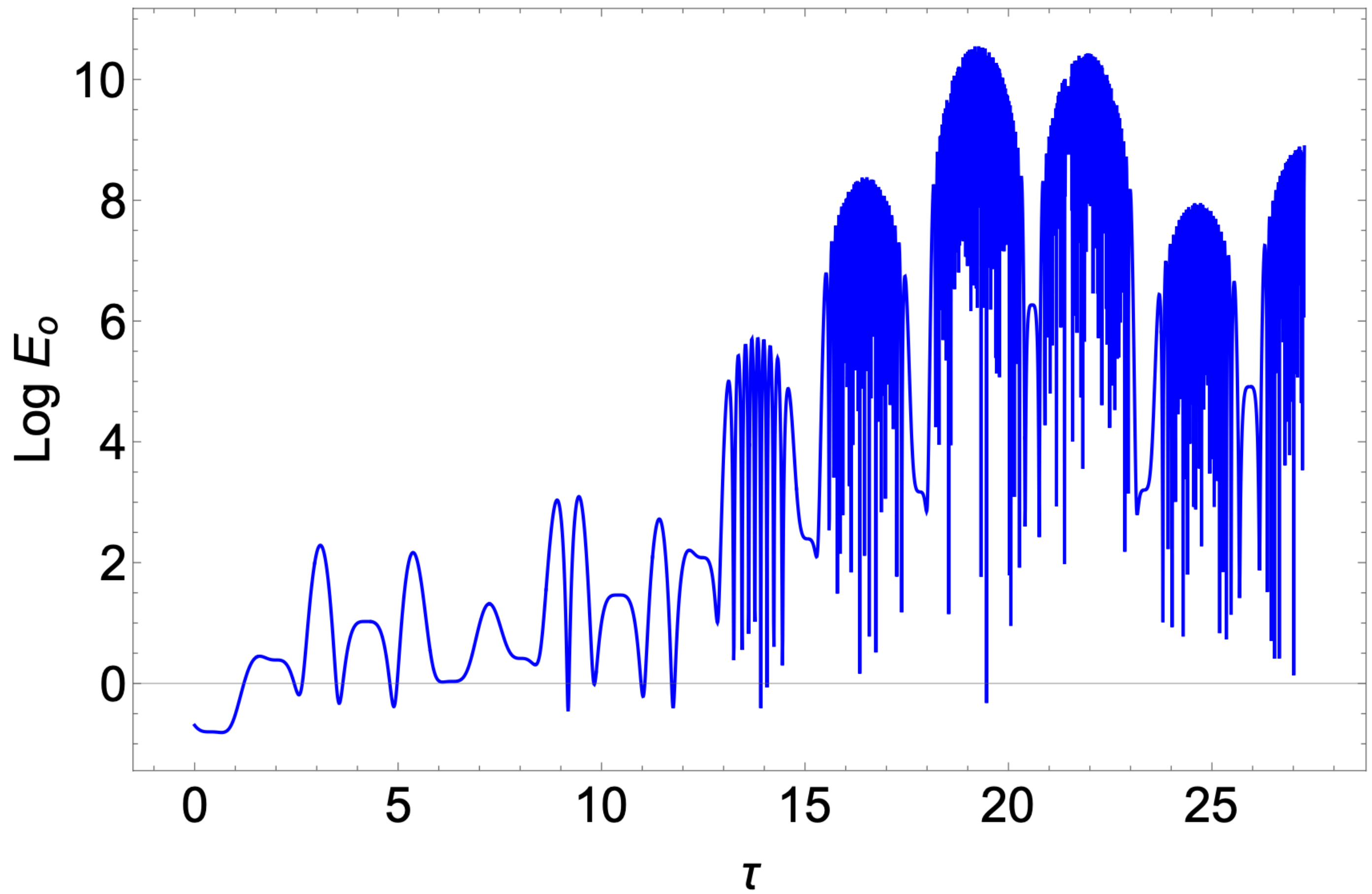


Figure 2: The growth of the logarithm of the energy of the observer is depicted for $\lambda = 4$, $\omega = 2.3$ and vacuum initial data (8) and (9).

How Unstable?

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{Q^2}{2} + \frac{\lambda}{2} q^2 Q^2 - \left(\frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} \right)$$

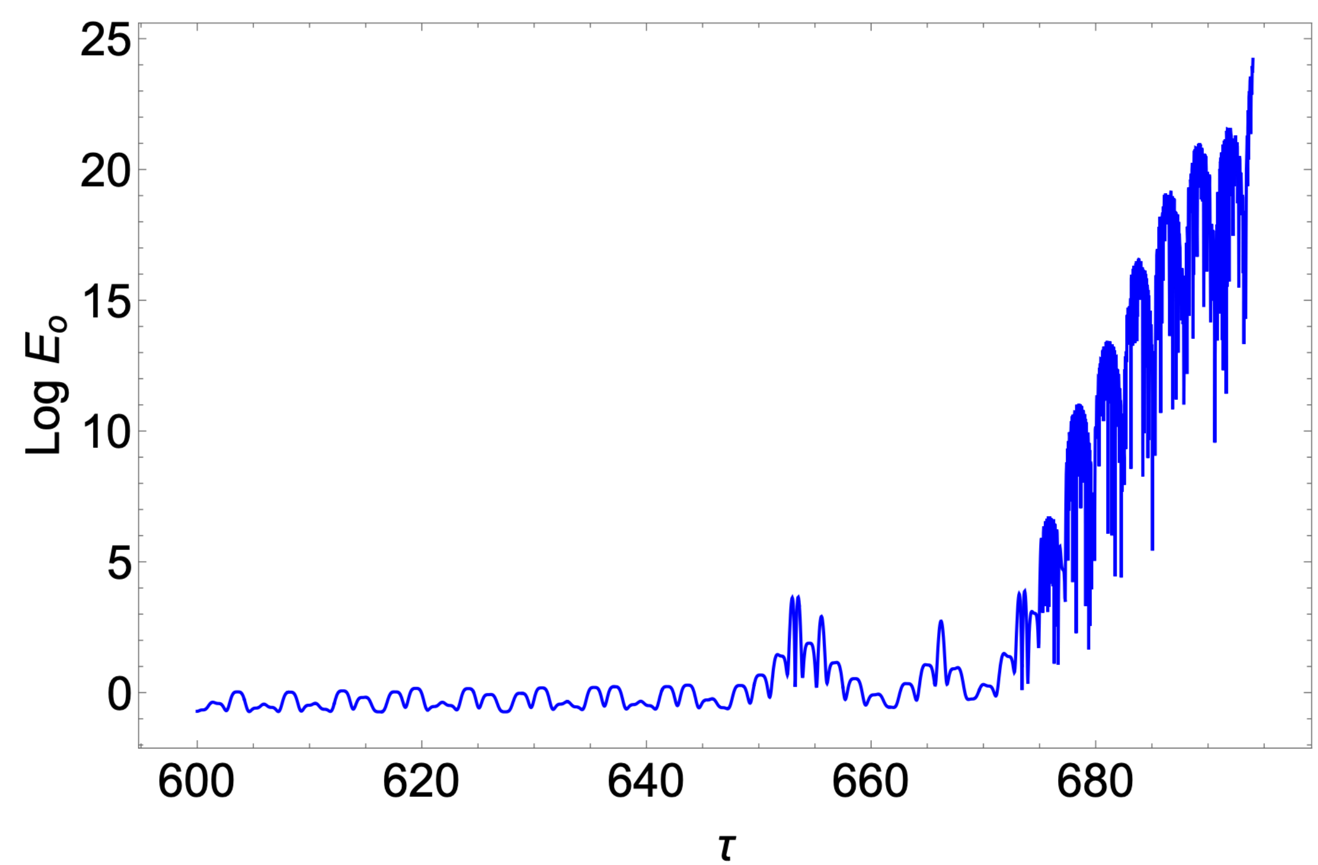


Figure 3: The growth of the logarithm of the energy of the observer is depicted for $\lambda = 2.35$, $\omega = 2.3$ and vacuum initial data (8) and (9). Here we see that the instability arises only much later after around a 100 of the periods of oscillation for the observer.

Our Stable PRL Model

Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + x^2) - \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2) + V_I(x, y)$$

Our Stable PRL Model

Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + x^2) - \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2) + V_I(x, y)$$

Normal Oscillator

Our Stable PRL Model

Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + x^2) - \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2) + V_I(x, y)$$

Normal Oscillator

Ghosty Oscillator

Our Stable PRL Model

Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + x^2) - \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2) + V_I(x, y)$$

Normal Oscillator

Ghosty Oscillator

Interaction Potential

Our Stable PRL Model

Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + x^2) - \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2) + V_I(x, y)$$

Normal Oscillator | Ghosty Oscillator | Interaction Potential

$$V_I(x, y) = \frac{\lambda}{\sqrt{\left[1 + 2\left(y^2 + x^2\right) + \left(y^2 - x^2\right)^2\right]}}$$

Our Stable PRL Model

Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + x^2) - \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2) + V_I(x, y)$$

Normal Oscillator

Ghosty Oscillator

Interaction Potential

Coupling Constant

$$V_I(x, y) = \frac{\lambda}{\sqrt{\left[1 + 2\left(y^2 + x^2\right) + \left(y^2 - x^2\right)^2\right]}}$$

Our Stable PRL Model

Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + x^2) - \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2) + V_I(x, y)$$

Normal Oscillator — Ghosty Oscillator — Interaction Potential

Coupling Constant λ

$$V_I(x, y) = \frac{\lambda}{\sqrt{\left[1 + 2\left(y^2 + x^2\right) + \left(y^2 - x^2\right)^2\right]}}$$

Interaction is bounded $0 < V_I(x, y)\,\lambda^{-1} \leq 1$

Potential

$$V_I(x, y) = \lambda \left[\left(x^2 - y^2 - 1 \right)^2 + 4x^2 \right]^{-1/2}$$

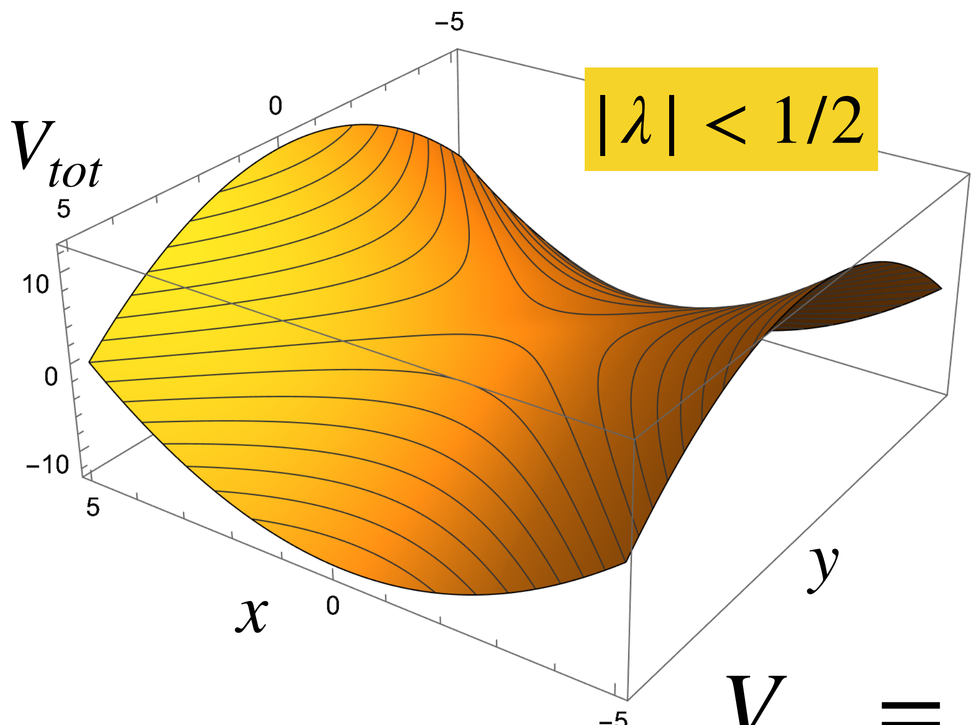
Potential

$$V_I(x,y) = \lambda\left[\left(x^2 - y^2 - 1\right)^2 + 4x^2\right]^{-1/2}$$

$$V_{tot} = V_I + \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)$$

Potential

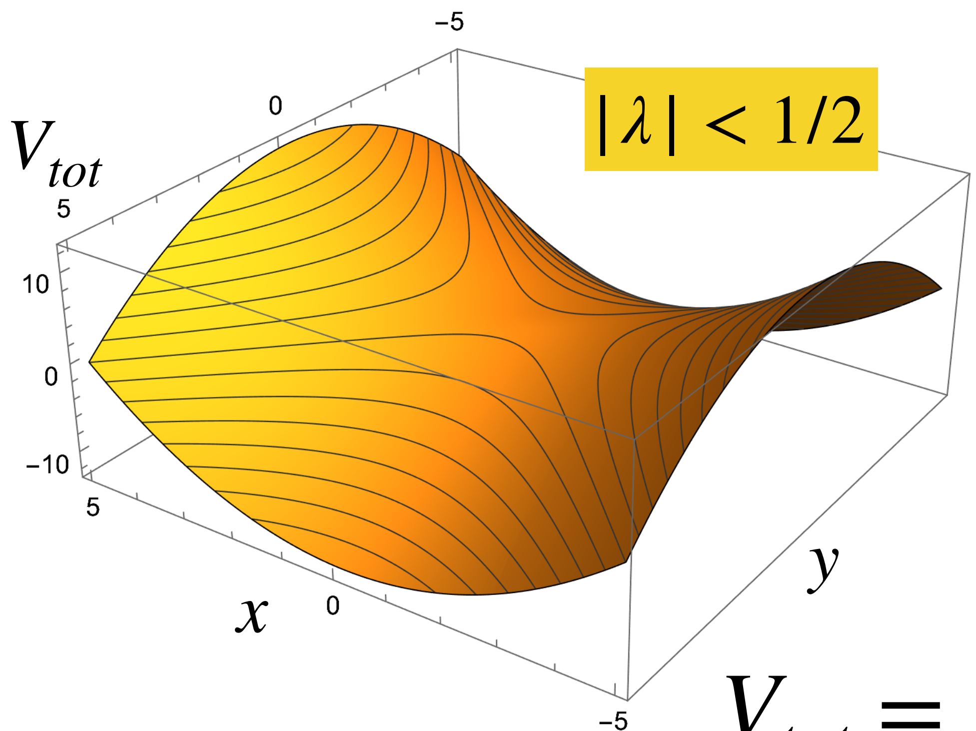
$$V_I(x,y) = \lambda\left[\left(x^2 - y^2 - 1\right)^2 + 4x^2\right]^{-1/2}$$

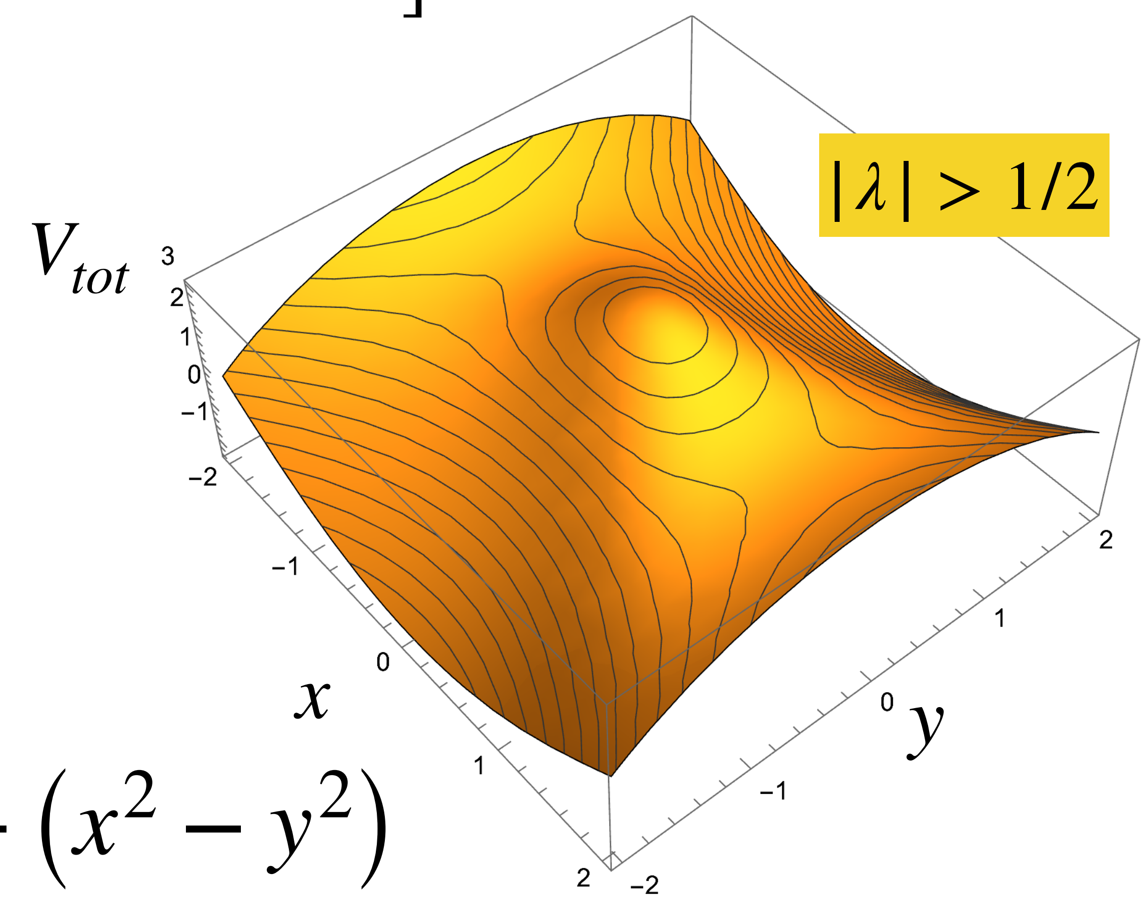


$$V_{tot} = V_I + \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)$$

Potential

$$V_I(x, y) = \lambda \left[\left(x^2 - y^2 - 1 \right)^2 + 4x^2 \right]^{-1/2}$$

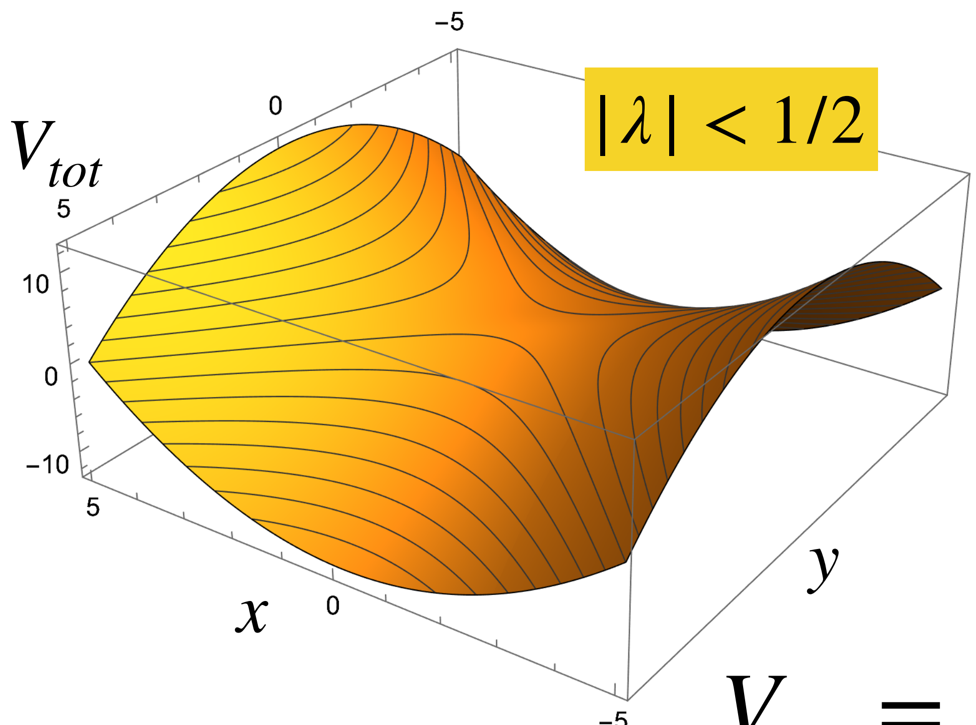


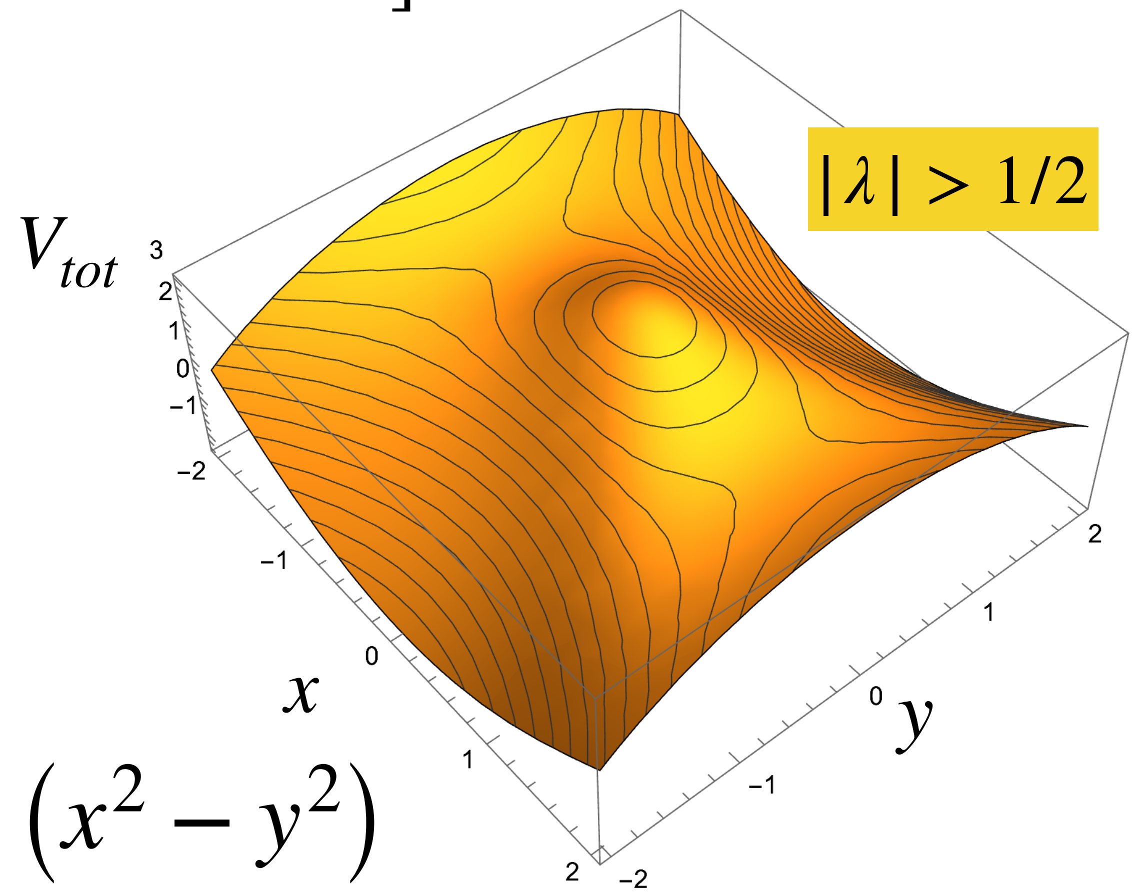


$$V_{tot} = V_I + \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2 \right)$$

Potential

$$V_I(x,y) = \lambda\left[\left(x^2 - y^2 - 1\right)^2 + 4x^2\right]^{-1/2}$$



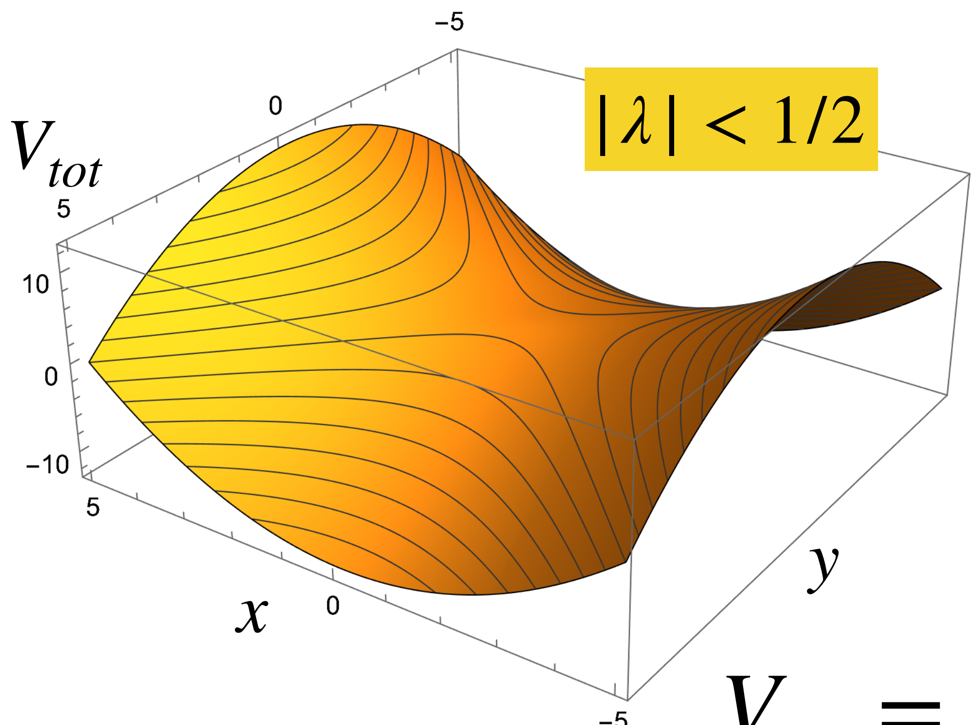


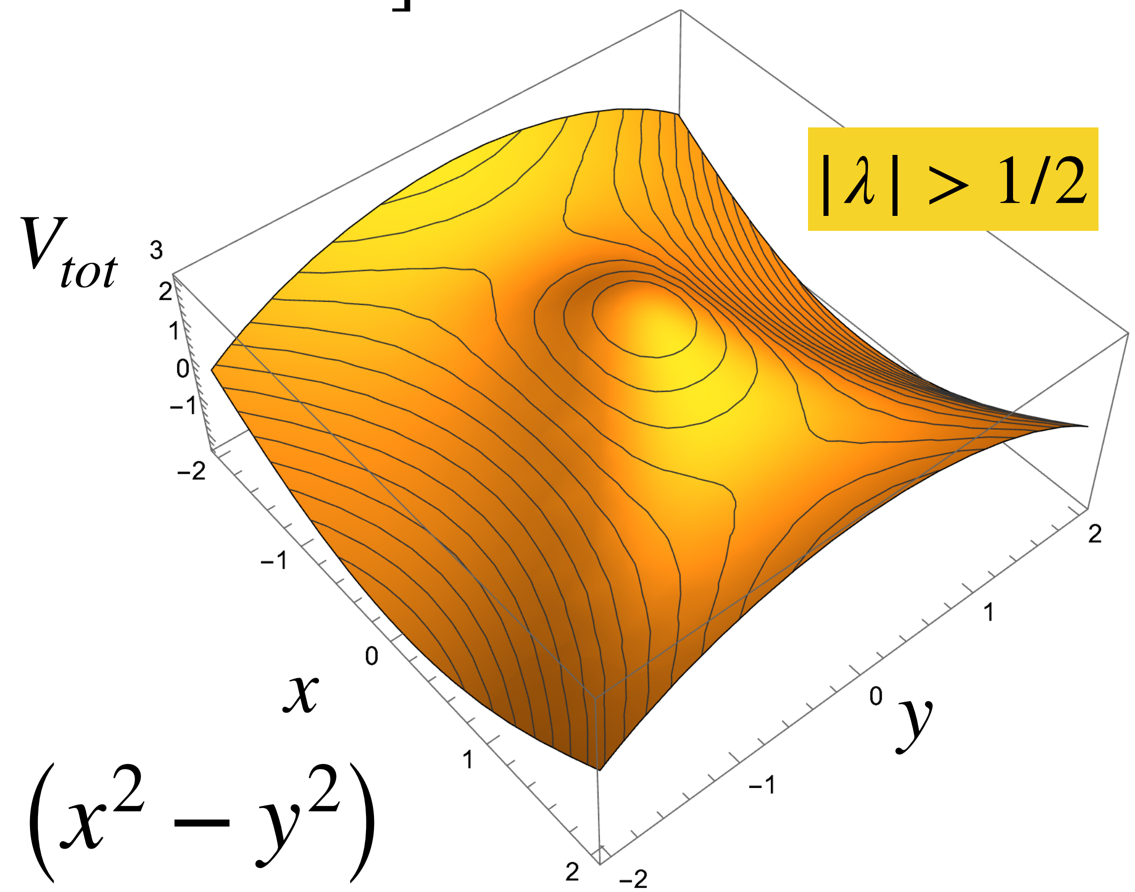
$$V_{tot} = V_I + \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)$$

$$V_{tot} = \frac{\omega_x^2}{2}x^2 - \frac{\omega_y^2}{2}y^2 + \lambda\left(x^4 + 4y^2x^2 + y^4\right) + \dots$$

Potential

$$V_I(x,y) = \lambda\left[\left(x^2 - y^2 - 1\right)^2 + 4x^2\right]^{-1/2}$$





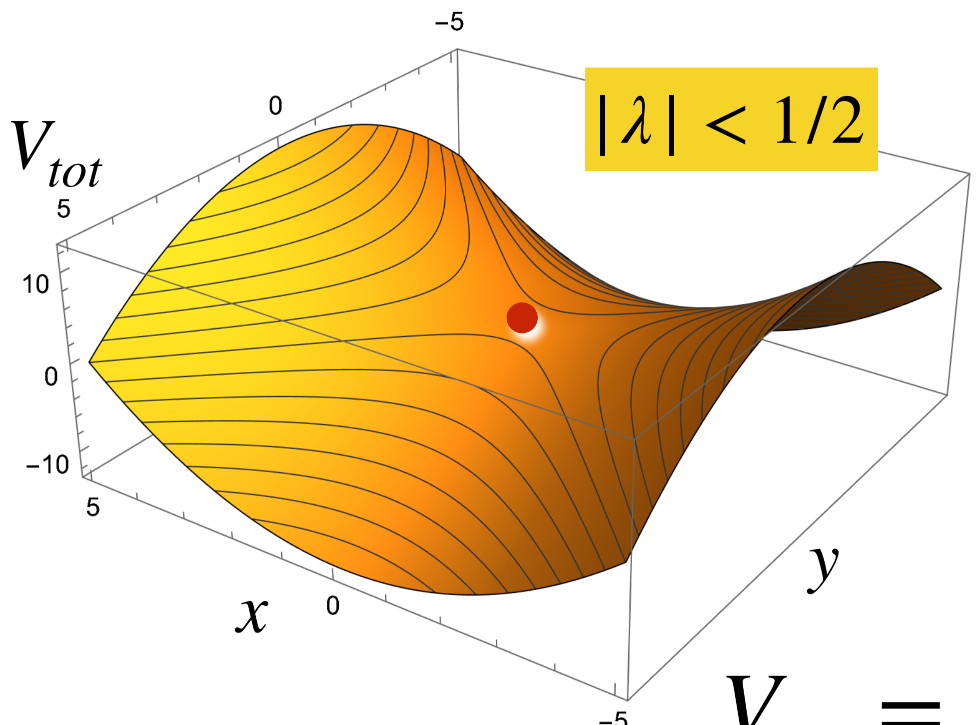
$$V_{tot} = V_I + \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)$$

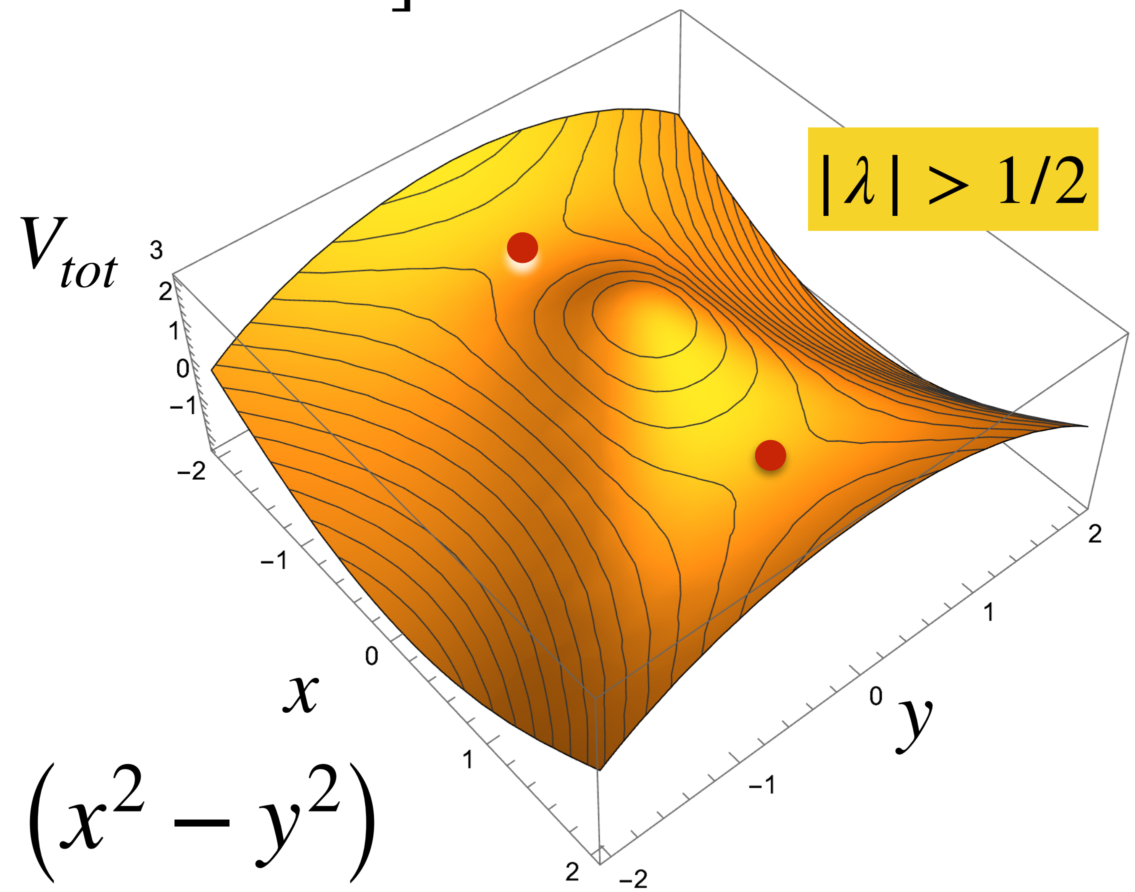
$$V_{tot} = \frac{\omega_x^2}{2}x^2 - \frac{\omega_y^2}{2}y^2 + \lambda\left(x^4 + 4y^2x^2 + y^4\right) + \ldots$$

$$\omega_x^2 = 1 - 2\lambda\,, \quad \text{and} \quad \omega_y^2 = 1 + 2\lambda$$

Potential

$$V_I(x,y) = \lambda\left[\left(x^2 - y^2 - 1\right)^2 + 4x^2\right]^{-1/2}$$





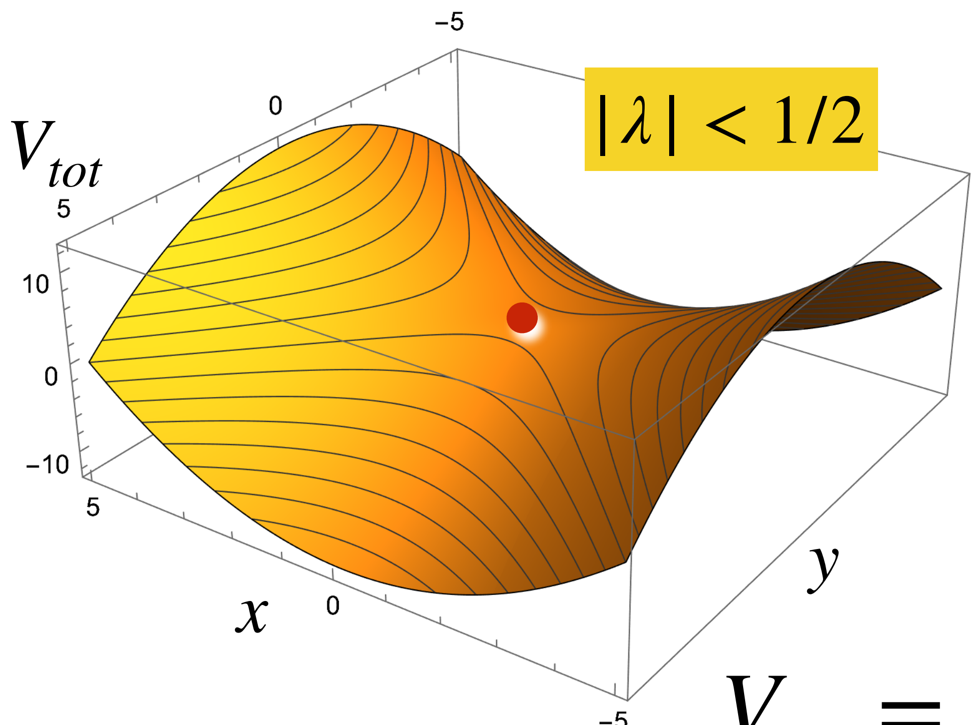
$$V_{tot} = V_I + \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)$$

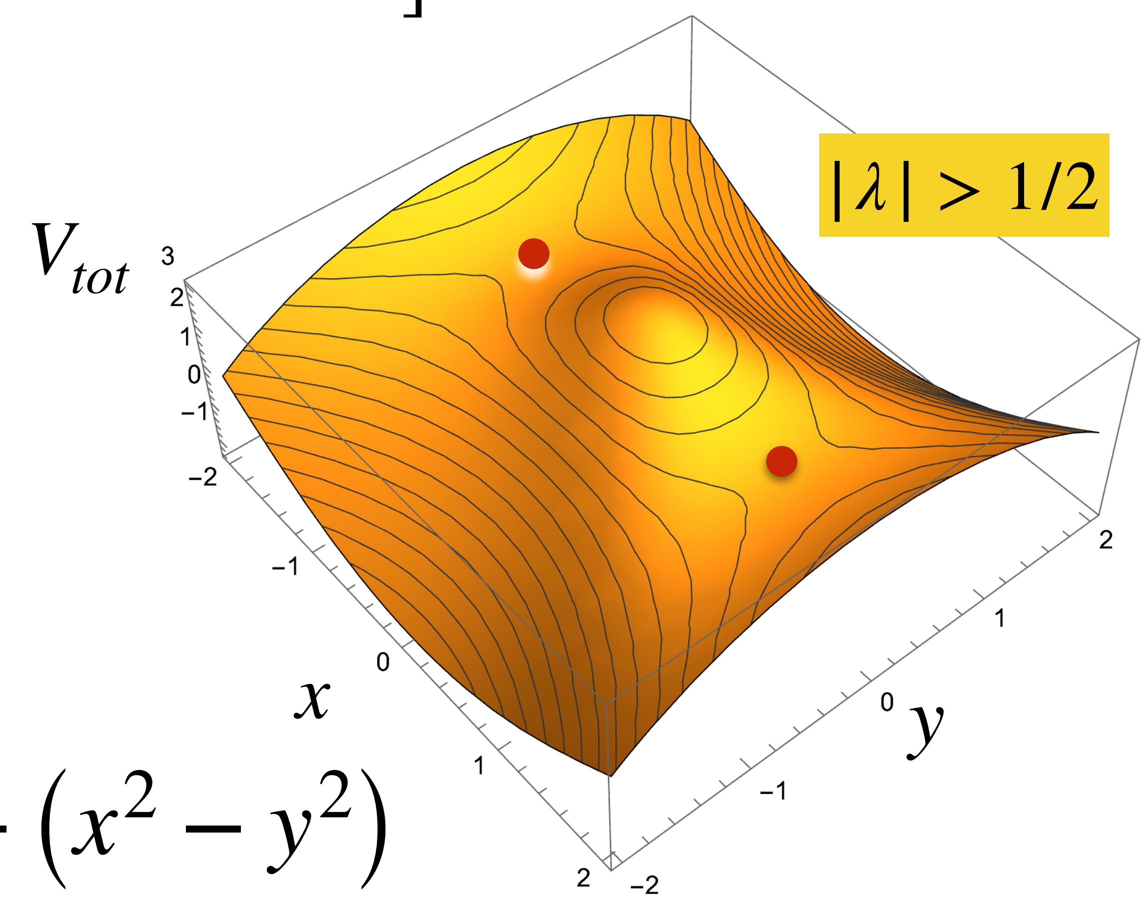
$$V_{tot} = \frac{\omega_x^2}{2}x^2 - \frac{\omega_y^2}{2}y^2 + \lambda\left(x^4 + 4y^2x^2 + y^4\right) + \ldots$$

$$\omega_x^2 = 1 - 2\lambda\,, \quad \text{and} \quad \omega_y^2 = 1 + 2\lambda$$

Potential

$$V_I(x,y) = \lambda\left[\left(x^2 - y^2 - 1\right)^2 + 4x^2\right]^{-1/2}$$





$$V_{tot} = V_I + \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)$$

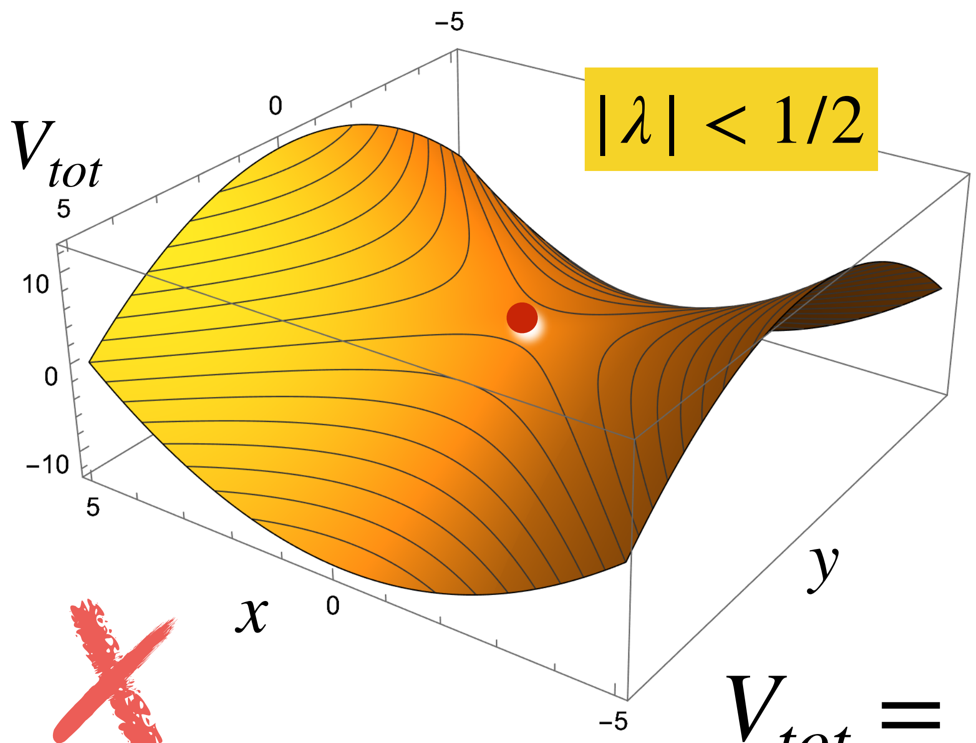
$$V_{tot} = \frac{\omega_x^2}{2}x^2 - \frac{\omega_y^2}{2}y^2 + \lambda\left(x^4 + 4y^2x^2 + y^4\right) + \ldots$$

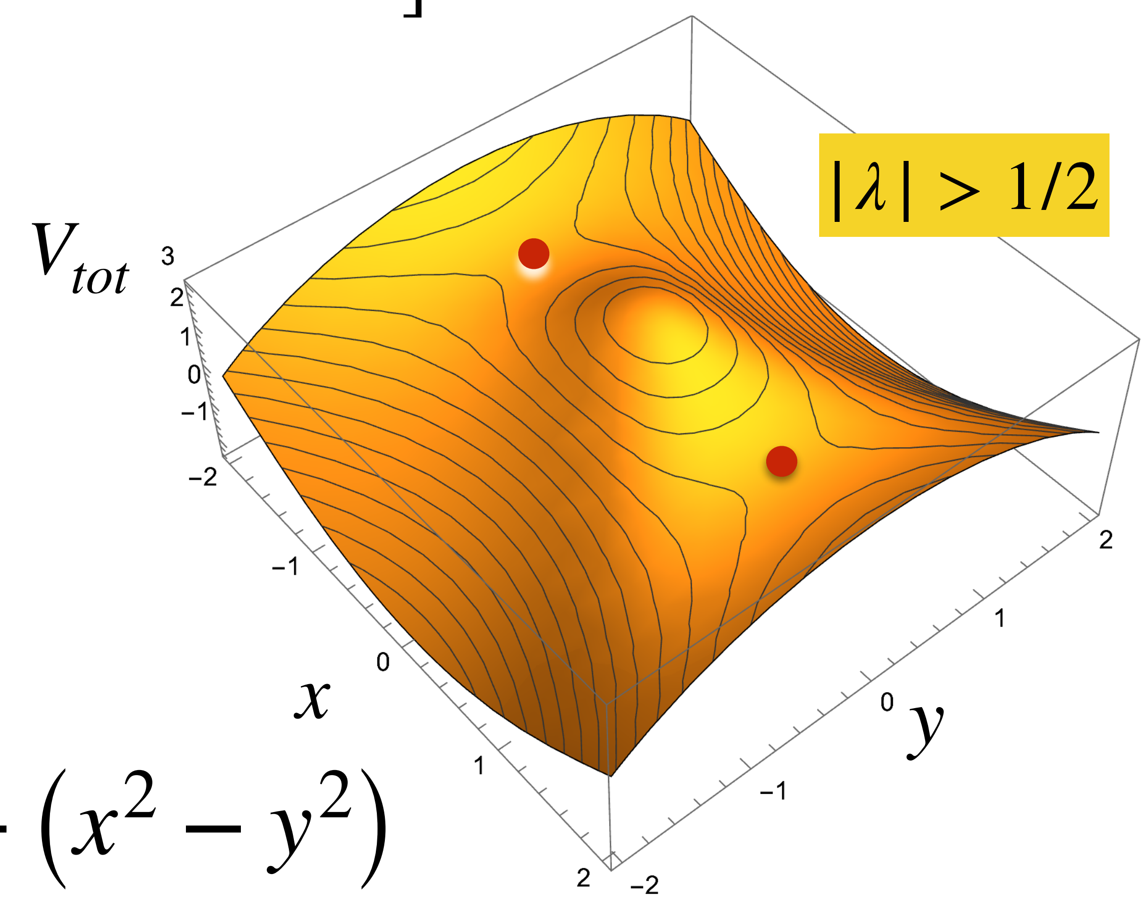
$$\omega_x^2 = 1 - 2\lambda\,, \quad \text{and} \quad \omega_y^2 = 1 + 2\lambda$$

Stable motion not at a minimum, but at a saddle point of the potential!

Potential

$$V_I(x,y) = \lambda\left[\left(x^2 - y^2 - 1\right)^2 + 4x^2\right]^{-1/2}$$





$$V_{tot} = V_I + \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)$$

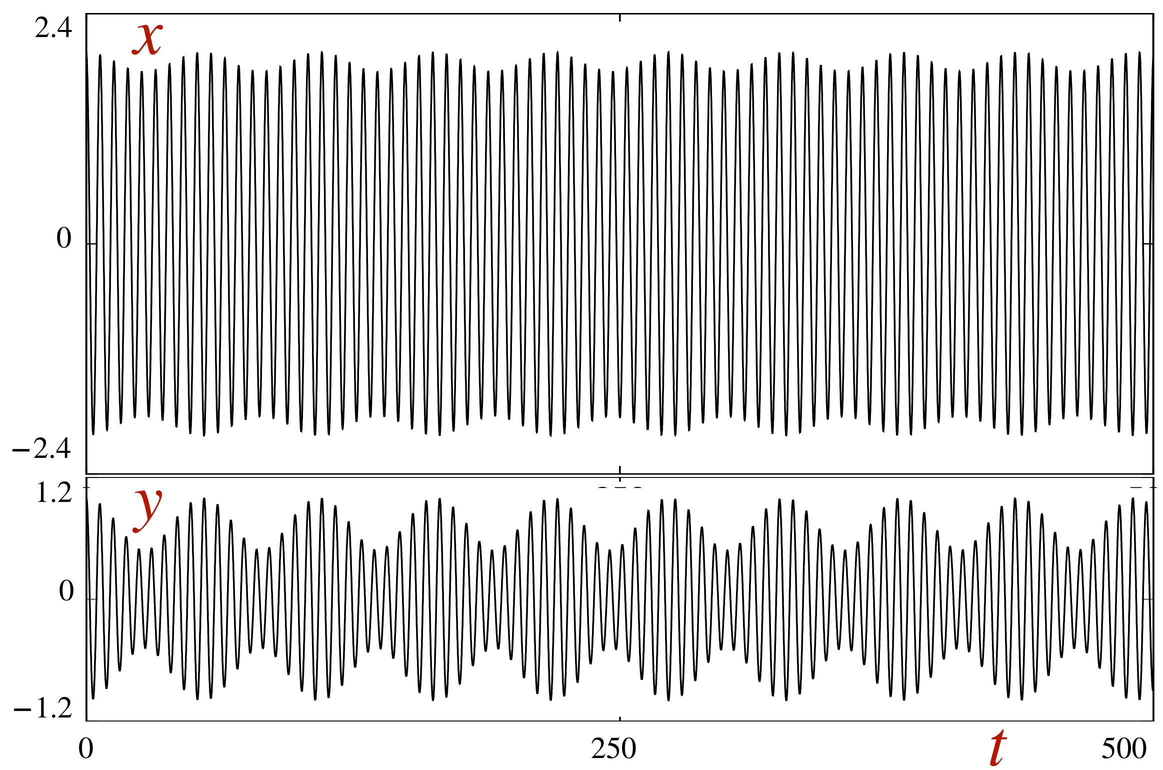
$$V_{tot} = \frac{\omega_x^2}{2}x^2 - \frac{\omega_y^2}{2}y^2 + \lambda\left(x^4 + 4y^2x^2 + y^4\right) + \ldots$$

$$\omega_x^2 = 1 - 2\lambda\,, \quad \text{and} \quad \omega_y^2 = 1 + 2\lambda$$

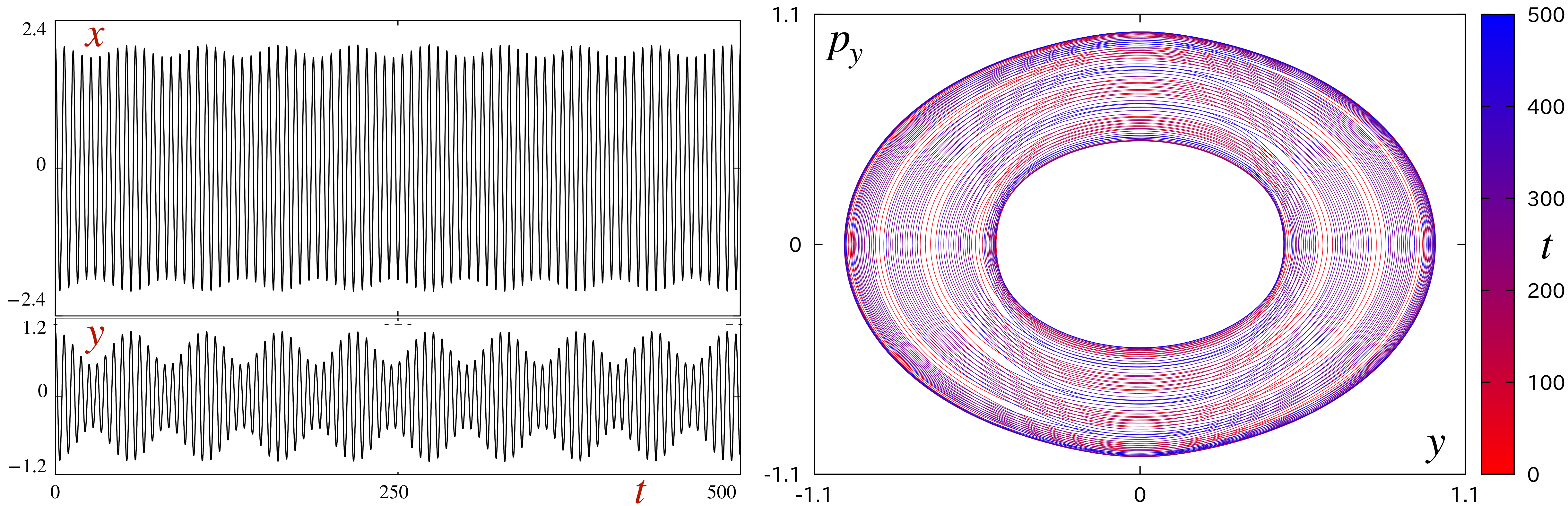
Stable motion not at a minimum, but at a saddle point of the potential!

Numerical Solutions

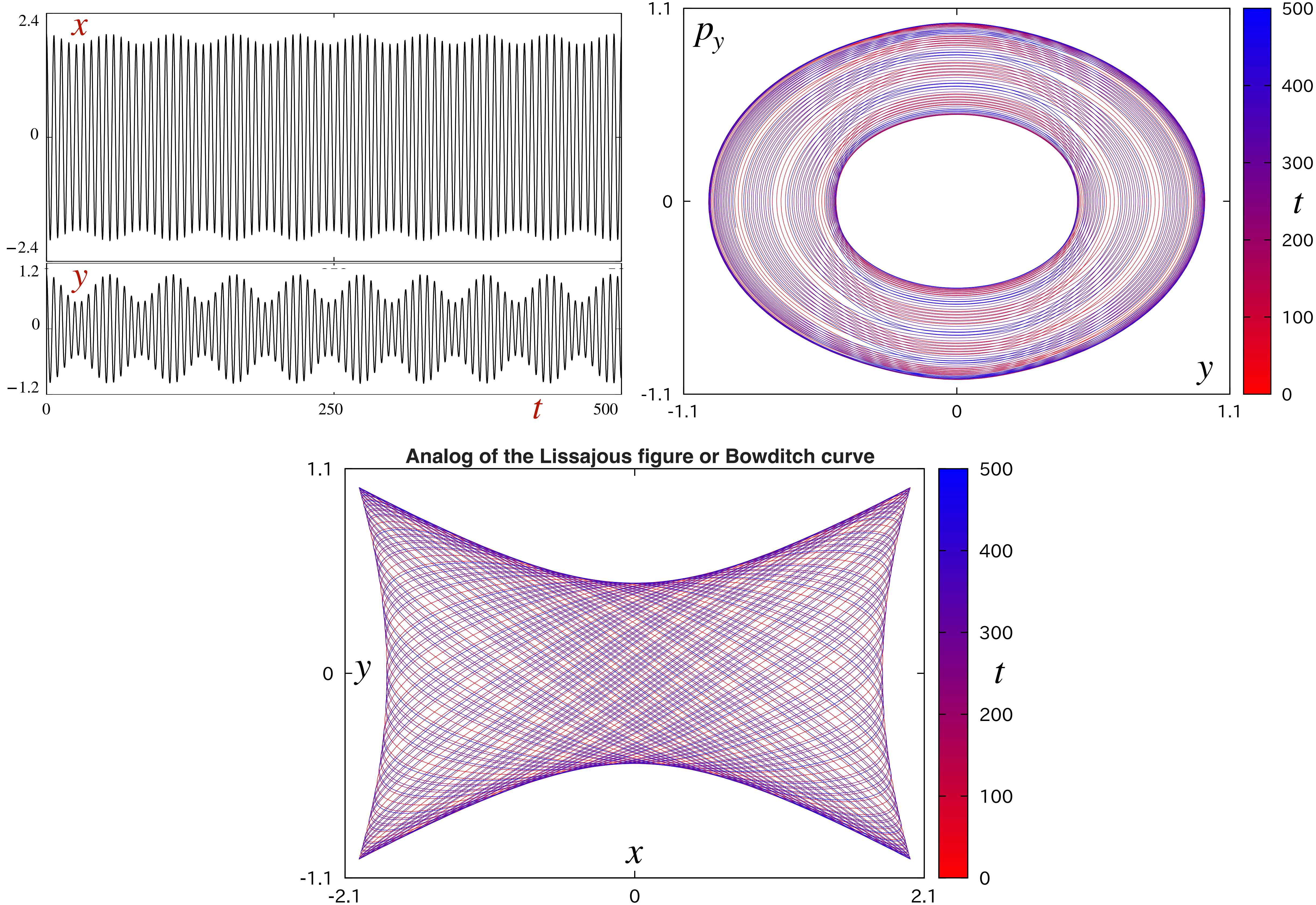
Numerical Solutions



Numerical Solutions



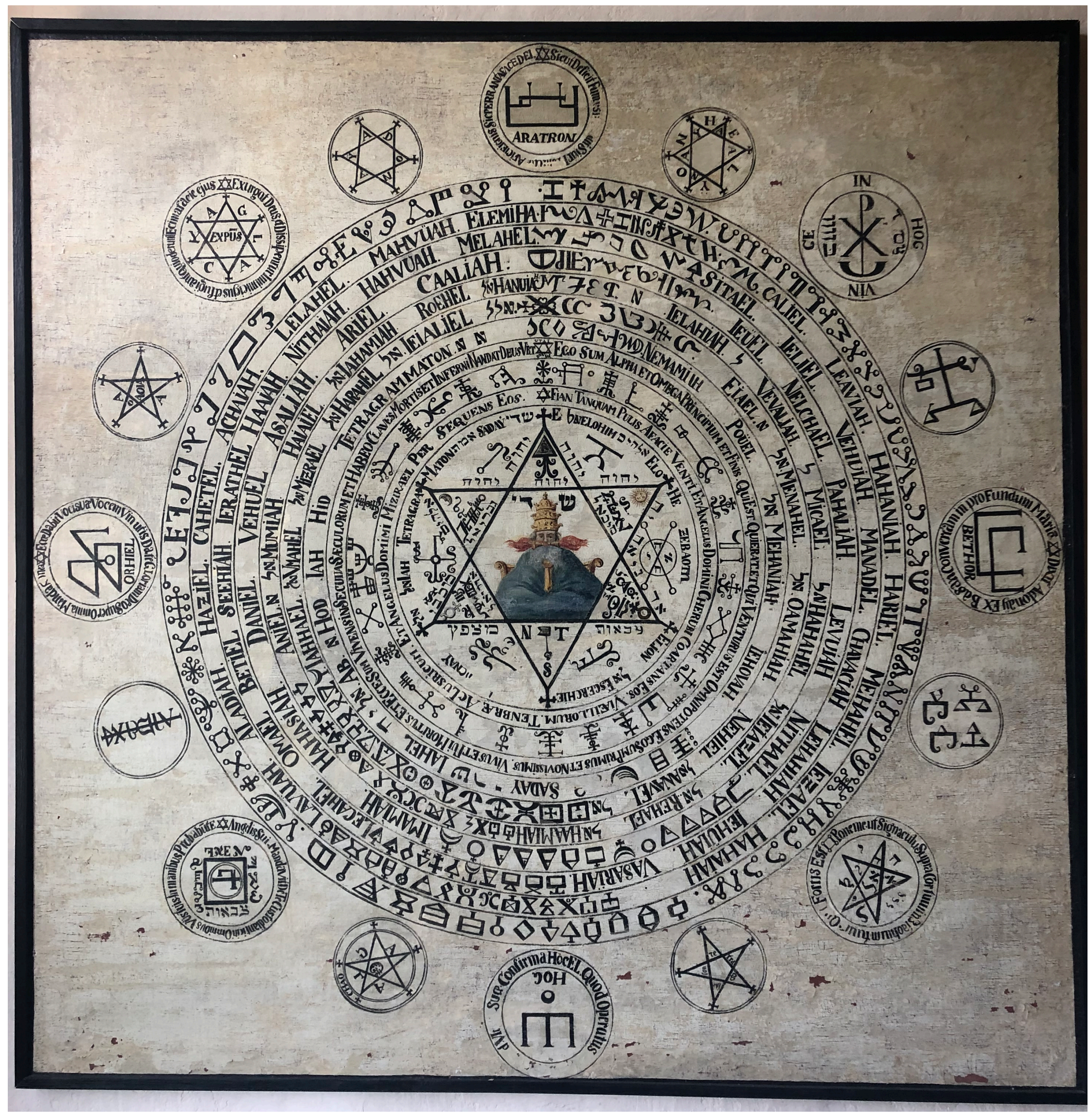
Numerical Solutions



Why is it stable?

Why is it stable?

What is the black magic?



First Integral and the Power of Imagination

First Integral and the Power of Imagination

$$C = K^2 + \left(p_x^2 + x^2\right) - \left(x^2 - y^2 - 1\right) V_I\left(x, y\right)$$

generator for hyperbolic rotations $K = p_y x + p_x y$

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

First Integral and the Power of Imagination

$$C = K^2 + \left(p_x^2 + x^2\right) - \left(x^2 - y^2 - 1\right) V_I\left(x, y\right)$$

generator for hyperbolic rotations $K = p_y x + p_x y$

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

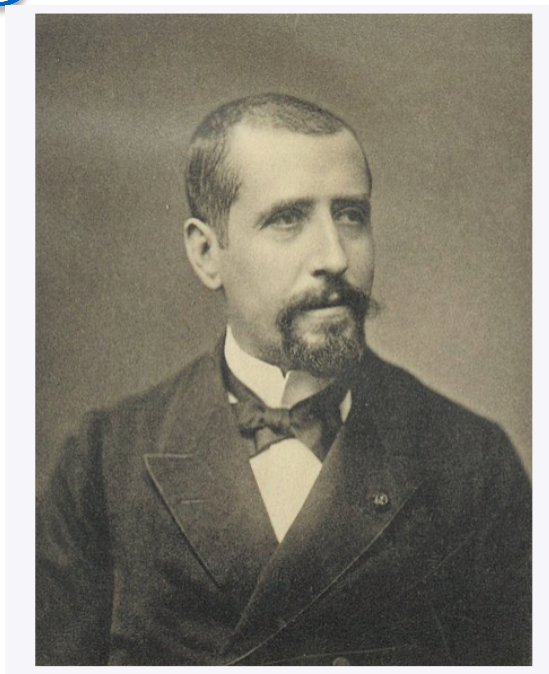
One can obtain our system via complex canonical

transformation $y = i\tilde{y}$, and $p_y = -i\tilde{p}_y$

(so that $[y, p_y] = [\tilde{y}, \tilde{p}_y] = 1$ etc.)

from a ghost-free integrable system introduced by

First Integral and the Power of Imagination



$$C = K^2 + \left(p_x^2 + x^2\right) - \left(x^2 - y^2 - 1\right) V_I\left(x, y\right)$$

generator for hyperbolic rotations $K = p_y x + p_x y$

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

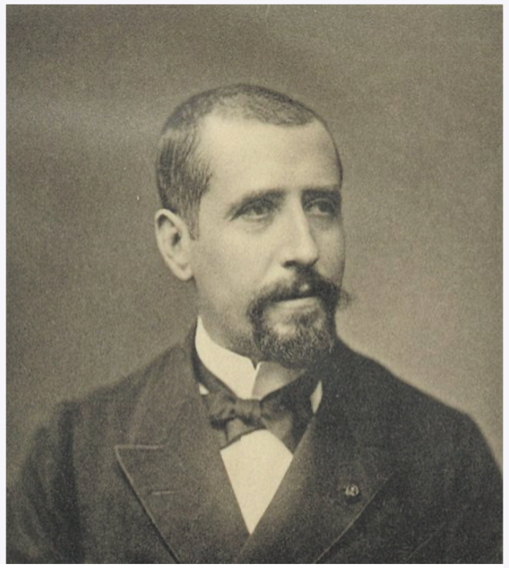
One can obtain our system via complex canonical

transformation $y = i\tilde{y}$, and $p_y = -i\tilde{p}_y$

(so that $[y, p_y] = [\tilde{y}, \tilde{p}_y] = 1$ etc.)

from a ghost-free integrable system introduced by

First Integral and the Power of Imagination



Jean-Gaston Darboux
FAS MIF FRS FRSE

$$C = K^2 + \left(p_x^2 + x^2\right) - \left(x^2 - y^2 - 1\right) V_I\left(x, y\right)$$

generator for hyperbolic rotations $K = p_y x + p_x y$

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

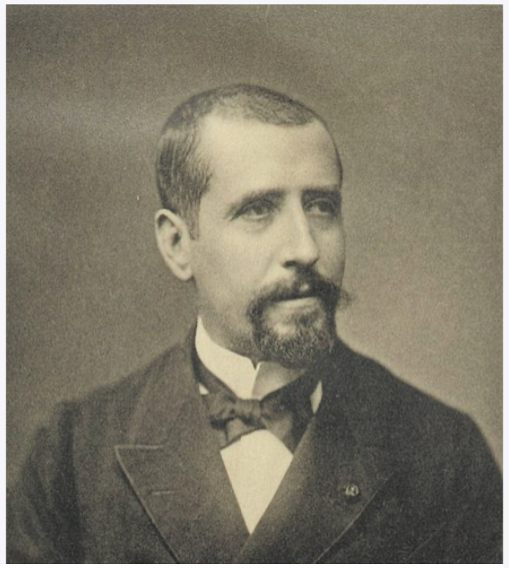
One can obtain our system via complex canonical

transformation $y = i\tilde{y}$, and $p_y = -i\tilde{p}_y$

(so that $[y, p_y] = [\tilde{y}, \tilde{p}_y] = 1$ etc.)

from a ghost-free integrable system introduced by

First Integral and the Power of Imagination



Jean-Gaston Darboux
FAS MIF FRS FRSE

$$C = K^2 + \left(p_x^2 + x^2\right) - \left(x^2 - y^2 - 1\right) V_I\left(x, y\right)$$

generator for hyperbolic rotations $K = p_y x + p_x y$

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

One can obtain our system via complex canonical

transformation $y = i\tilde{y}$, and $p_y = -i\tilde{p}_y$

(so that $[y, p_y] = [\tilde{y}, \tilde{p}_y] = 1$ etc.)

from a ghost-free integrable system introduced by

Darboux in 1901

First Integral and the Power of Imagination

$$C = K^2 + \left(p_x^2 + x^2\right) - \left(x^2 - y^2 - 1\right) V_I\left(x, y\right)$$

generator for hyperbolic rotations $K = p_y x + p_x y$

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

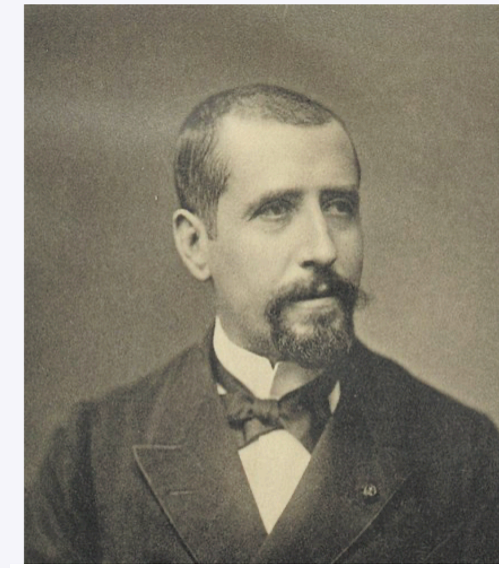
One can obtain our system via complex canonical

transformation $y = i\tilde{y}\,,$ and $p_y = -\,i\tilde{p}_y$

(so that $[y, p_y] = [\tilde{y}, \tilde{p}_y] = 1$ etc.)

from a ghost-free integrable system introduced by

Darboux in 1901



Jean-Gaston Darboux
FAS MIF FRS FRSE

First Integral and the Power of Imagination

$$C = K^2 + \left(p_x^2 + x^2\right) - \left(x^2 - y^2 - 1\right) V_I\left(x, y\right)$$

generator for hyperbolic rotations $K = p_y x + p_x y$

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

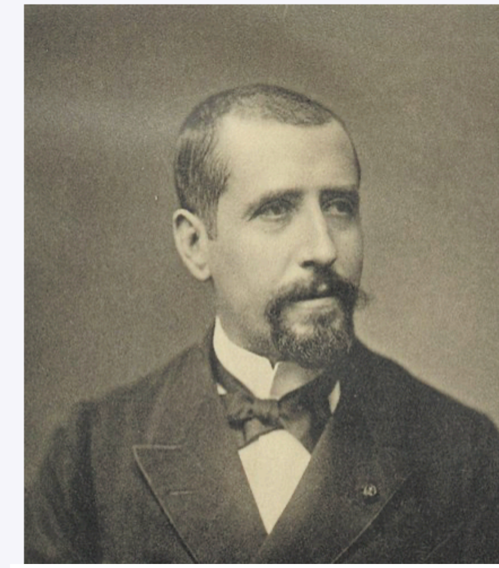
One can obtain our system via complex canonical

transformation $y = i\tilde{y}$, and $p_y = -i\tilde{p}_y$

(so that $[y, p_y] = [\tilde{y}, \tilde{p}_y] = 1$ etc.)

from a ghost-free integrable system introduced by

Darboux in 1901



Jean-Gaston Darboux
FAS MIF FRS FRSE

Joseph Liouville
FRS FRSE FAS

First Integral and the Power of Imagination

$$C = K^2 + \left(p_x^2 + x^2\right) - \left(x^2 - y^2 - 1\right) V_I\left(x, y\right)$$

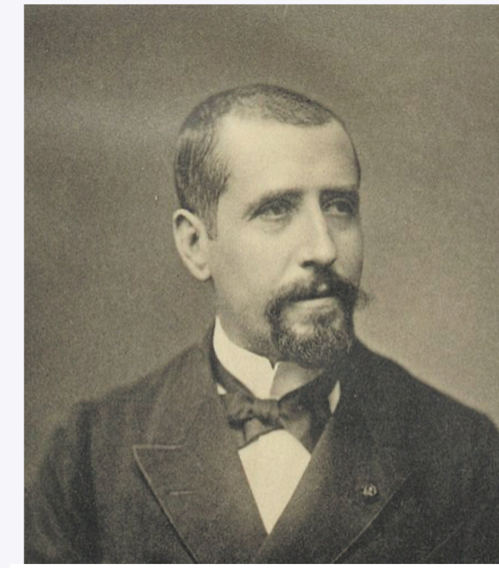
generator for hyperbolic rotations $K = p_y x + p_x y$

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

One can obtain our system via complex canonical transformation $y = i\tilde{y}$, and $p_y = -i\tilde{p}_y$

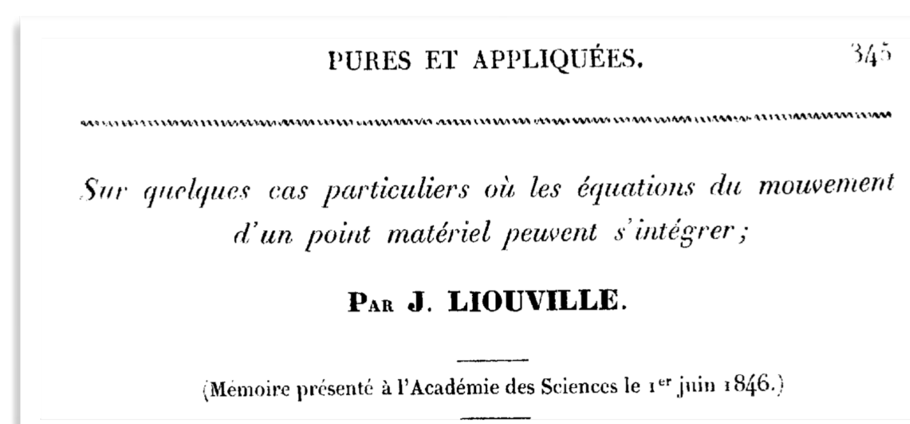
(so that $[y, p_y] = [\tilde{y}, \tilde{p}_y] = 1$ etc.)

from a ghost-free integrable system introduced by Darboux in 1901



Jean-Gaston Darboux
FAS MIF FRS FRSE

Joseph Liouville
FRS FRSE FAS



PURES ET APPLIQUÉES. 345

Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer;

PAR J. LIOUVILLE.

(Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 1er juin 1846.)

First Integral and the Power of Imagination

$$C = K^2 + \left(p_x^2 + x^2\right) - \left(x^2 - y^2 - 1\right) V_I\left(x, y\right)$$

generator for hyperbolic rotations $K = p_y x + p_x y$

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

One can obtain our system via complex canonical

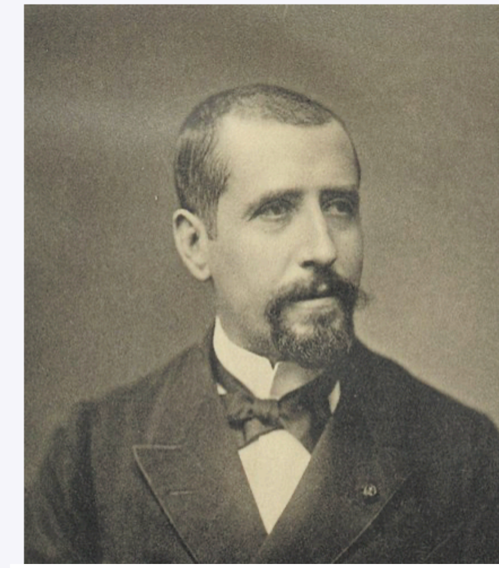
transformation $y = i\tilde{y}$, and $p_y = -i\tilde{p}_y$

(so that $[y, p_y] = [\tilde{y}, \tilde{p}_y] = 1$ etc.)

from a ghost-free integrable system introduced by

Darboux in 1901

Joseph Liouville 1846



Jean-Gaston Darboux
FAS MIF FRS FRSE

Joseph Liouville
FRS FRSE FAS

PURES ET APPLIQUÉES. 345

Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer;

PAR J. LIOUVILLE.

(Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 1er juin 1846.)

First Integral and the Power of Imagination

$$C = K^2 + \left(p_x^2 + x^2\right) - \left(x^2 - y^2 - 1\right) V_I\left(x, y\right)$$

generator for hyperbolic rotations $K = p_y x + p_x y$

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

One can obtain our system via complex canonical

transformation $y = i\tilde{y}$, and $p_y = -i\tilde{p}_y$

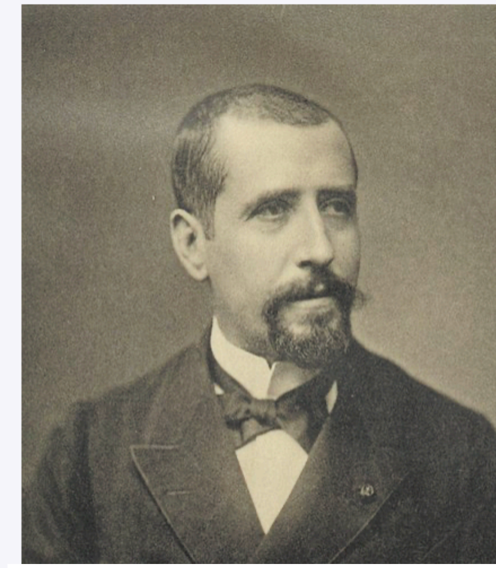
(so that $[y, p_y] = [\tilde{y}, \tilde{p}_y] = 1$ etc.)

from a ghost-free integrable system introduced by

Darboux in 1901

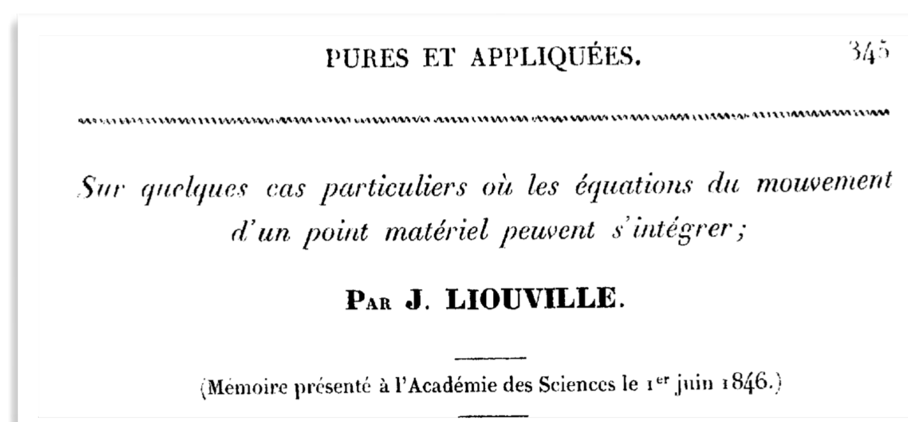
Joseph Liouville 1846

Is there any symmetry behind this conserved quantity C?



Jean-Gaston Darboux
FAS MIF FRS FRSE

Joseph Liouville
FRS FRSE FAS



PURES ET APPLIQUÉES. 345

Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer;

PAR J. LIOUVILLE.

(Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 1er juin 1846.)

Another First Integral: $\mathscr{E}$

$$\mathscr{E} = C - H = \Sigma + \left(y^2 - x^2\right) V_I\left(x, y\right)$$

Another First Integral: $\mathscr{E}$

$$\mathscr{E} = C - H = \Sigma + \left(y^2 - x^2\right) V_I\left(x, y\right)$$

where

$$\Sigma = \left(p_y x + p_x y\right)^2 + \frac{1}{2}\left(p_x^2 + x^2\right) + \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2)$$

Another First Integral: $\mathscr{E}$

$$\mathscr{E} = C - H = \Sigma + \left(y^2 - x^2\right) V_I\left(x, y\right)$$

where

$$\Sigma = \left(p_y x + p_x y\right)^2 + \frac{1}{2}\left(p_x^2 + x^2\right) + \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2)$$

the interaction part is always bounded

$$-|\lambda| \leq \left(y^2 - x^2\right) V_I\left(x, y\right) \leq |\lambda|$$

as

$$V_I\left(x, y\right) = \lambda\left[1 + 2\left(y^2 + x^2\right) + \left(y^2 - x^2\right)^2\right]^{-1/2}$$

Another First Integral: $\mathscr{E}$

$$\mathscr{E} = C - H = \Sigma + \left(y^2 - x^2\right) V_I\left(x, y\right)$$

where

$$\Sigma = \left(p_y x + p_x y\right)^2 + \frac{1}{2}\left(p_x^2 + x^2\right) + \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2)$$

the interaction part is always bounded

$$-|\lambda| \leq \left(y^2 - x^2\right) V_I\left(x, y\right) \leq |\lambda|$$

as

$$V_I\left(x, y\right) = \lambda\left[1 + 2\left(y^2 + x^2\right) + \left(y^2 - x^2\right)^2\right]^{-1/2}$$

for all times $\Sigma - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma + |\lambda|$

Finiteness of motion

at initial point of time t_a $$\Sigma_a - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma_a + |\lambda|$$

Finiteness of motion

at initial point of time t_a $\quad \Sigma_a - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma_a + |\lambda|$

at any later point in time t_b $\quad \Sigma_b - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma_b + |\lambda|$

Finiteness of motion

at initial point of time t_a $$\Sigma_a - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma_a + |\lambda|$$

at any later point in time t_b $$\Sigma_b - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma_b + |\lambda|$$

Finiteness of motion

at initial point of time t_a $\qquad \Sigma_a - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma_a + |\lambda|$

at any later point in time t_b $\qquad \Sigma_b - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma_b + |\lambda|$

Finiteness of motion

at initial point of time t_a $$\Sigma_a - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma_a + |\lambda|$$

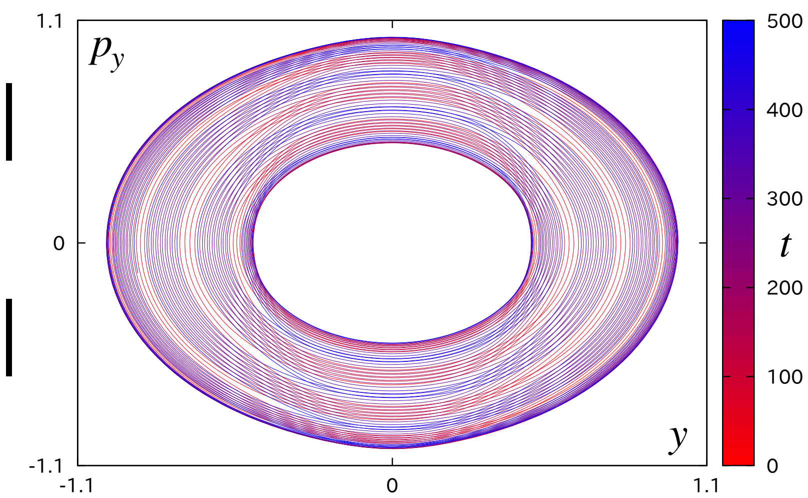
at any later point in time t_b $$\Sigma_b - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma_b + |\lambda|$$

Σ is positive definite and
is confined in a stripe

$$\Sigma_a - 2|\lambda| \leq \Sigma_b \leq \Sigma_a + 2|\lambda|$$

Finiteness of motion

at initial point of time t_a $\quad \Sigma_a - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma_a + |\lambda|$



at any later point in time t_b $\quad \Sigma_b - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma_b + |\lambda|$

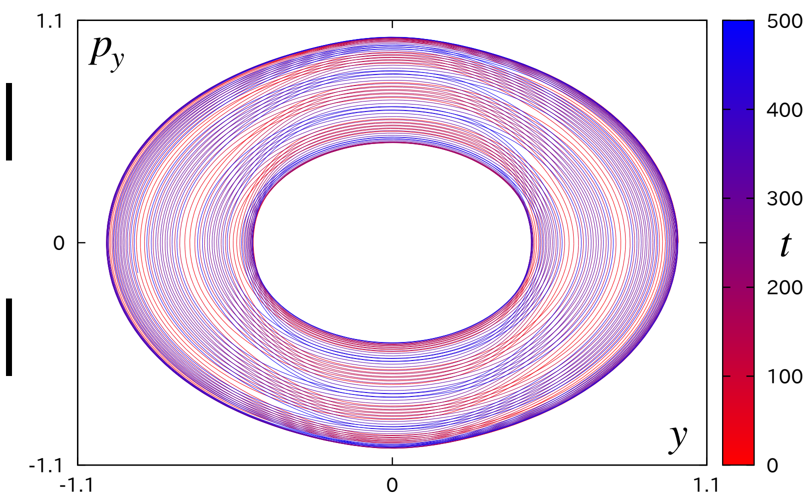
Σ is positive definite and
is confined in a stripe

$$\Sigma_a - 2|\lambda| \leq \Sigma_b \leq \Sigma_a + 2|\lambda|$$

Finiteness of motion

at initial point of time t_a $\quad \Sigma_a - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma_a + |\lambda|$

at any later point in time t_b $\quad \Sigma_b - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma_b + |\lambda|$



Σ is positive definite and is confined in a stripe

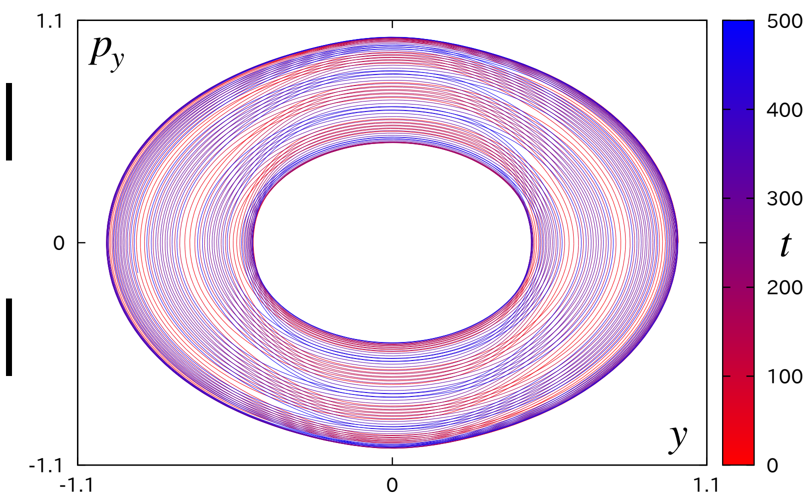
$$\Sigma_a - 2|\lambda| \leq \Sigma_b \leq \Sigma_a + 2|\lambda|$$

Thus the trajectory is confined in a stripe, as for $\xi = \left(x, y, p_x, p_y\right)$ we have $\left|\xi\right|^2 \leq 2\Sigma$

Finiteness of motion

at initial point of time t_a $\Sigma_a - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma_a + |\lambda|$

at any later point in time t_b $\Sigma_b - |\lambda| \leq \mathscr{E} \leq \Sigma_b + |\lambda|$



Σ is positive definite and is confined in a stripe

$$\Sigma_a - 2|\lambda| \leq \Sigma_b \leq \Sigma_a + 2|\lambda|$$

Thus the trajectory is confined in a stripe, as for $\xi = \left(x, y, p_x, p_y\right)$ we have $|\xi|^2 \leq 2\Sigma$

System always evolves in a finite region of phase space

Lyapunov Stability

$$\mathscr{E} = C - H = \Sigma + \left(y^2 - x^2\right) V_I\left(x, y\right)$$

where

$$\Sigma = K^2 + \frac{1}{2}\left(p_x^2 + x^2\right) + \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2)$$

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

The General Problem of the Stability of Motion, Doctoral dissertation, Kharkov U. 1892

Lyapunov Stability

$$\mathscr{E} = C - H = \Sigma + \left(y^2 - x^2\right) V_I\left(x, y\right)$$

where

$$\Sigma = K^2 + \frac{1}{2}\left(p_x^2 + x^2\right) + \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2)$$

- at the origin $\mathscr{E}(0) = 0$

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

The General Problem of the Stability of Motion, Doctoral dissertation, Kharkov U. 1892

Lyapunov Stability

$$\mathscr{E} = C - H = \Sigma + \left(y^2 - x^2\right) V_I\left(x, y\right)$$

where

$$\Sigma = K^2 + \frac{1}{2}\left(p_x^2 + x^2\right) + \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2)$$

- at the origin $\mathscr{E}(0) = 0$

- for $\lambda\left(y^2 - x^2\right) > 0$ this first integral is positive, $\mathscr{E} > 0$

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

The General Problem of the Stability of Motion, Doctoral dissertation, Kharkov U. 1892

Lyapunov Stability

$$\mathscr{E} = C - H = \Sigma + \left(y^2 - x^2\right) V_I \left(x, y\right)$$

where

$$\Sigma = K^2 + \frac{1}{2}\left(p_x^2 + x^2\right) + \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2)$$

- at the origin $\mathscr{E}(0) = 0$

- for $\lambda\left(y^2 - x^2\right) > 0$ this first integral is positive, $\mathscr{E} > 0$

- for $\lambda\left(y^2 - x^2\right) < 0$ this first integral

$$\mathscr{E} > \Sigma + \lambda\left(y^2 - x^2\right) = K^2 + \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + \omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2\right)$$

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

The General Problem of the Stability of Motion, Doctoral dissertation, Kharkov U. 1892

Lyapunov Stability

$$\mathscr{E} = C - H = \Sigma + \left(y^2 - x^2\right) V_I\left(x, y\right)$$

where

$$\Sigma = K^2 + \frac{1}{2}\left(p_x^2 + x^2\right) + \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2)$$

- at the origin $\mathscr{E}(0) = 0$

- for $\lambda\left(y^2 - x^2\right) > 0$ this first integral is positive, $\mathscr{E} > 0$

- for $\lambda\left(y^2 - x^2\right) < 0$ this first integral

$$\mathscr{E} > \Sigma + \lambda\left(y^2 - x^2\right) = K^2 + \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + \omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2\right) > 0 \text{ for } |\lambda| < 1/2$$

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

The General Problem of the Stability of Motion, Doctoral dissertation, Kharkov U. 1892

Lyapunov Stability

$$\mathscr{E} = C - H = \Sigma + \left(y^2 - x^2\right) V_I\left(x, y\right)$$

where

$$\Sigma = K^2 + \frac{1}{2}\left(p_x^2 + x^2\right) + \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2)$$

- at the origin $\mathscr{E}(0) = 0$
- for $\lambda\left(y^2 - x^2\right) > 0$ this first integral is positive, $\mathscr{E} > 0$
- for $\lambda\left(y^2 - x^2\right) < 0$ this first integral

$$\mathscr{E} > \Sigma + \lambda\left(y^2 - x^2\right) = K^2 + \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + \omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2\right) > 0 \text{ for } |\lambda| < 1/2$$

$\mathscr{E}$ is a Lyapunov function

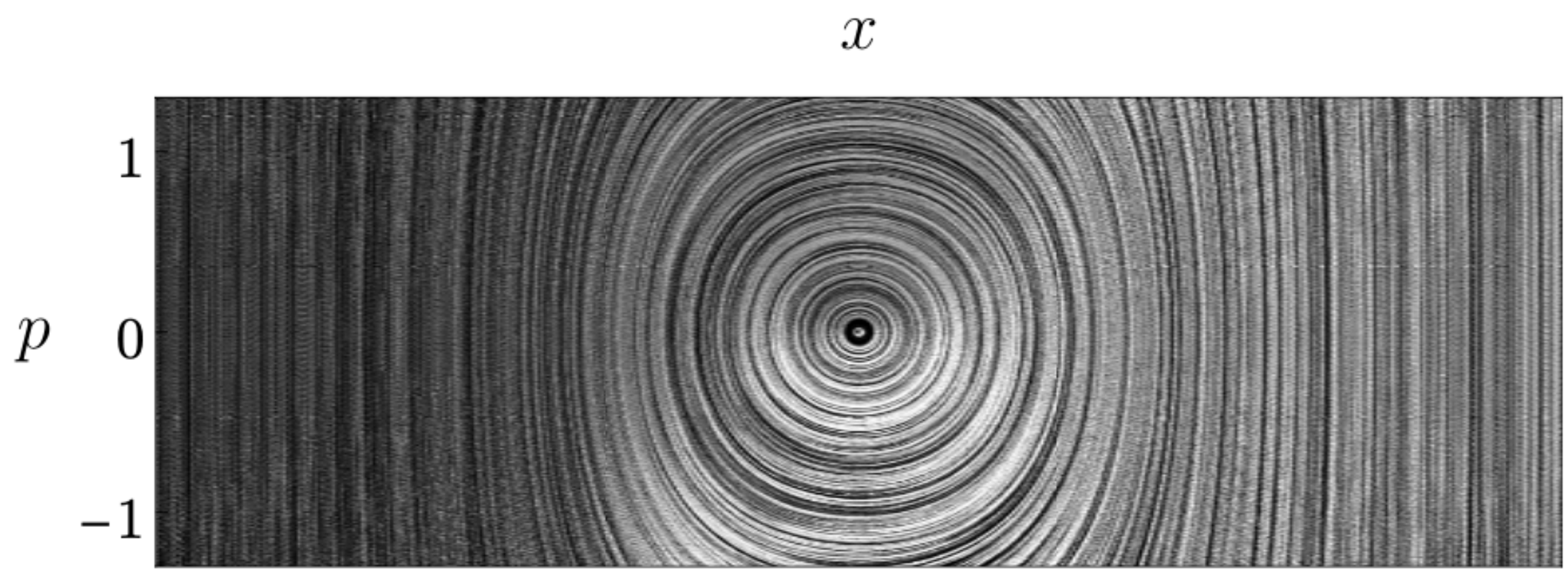
so that the system is stable at the origin for $|\lambda| < 1/2$

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

The General Problem of the Stability of Motion, Doctoral dissertation, Kharkov U. 1892

Does “imagination” matter for stability?

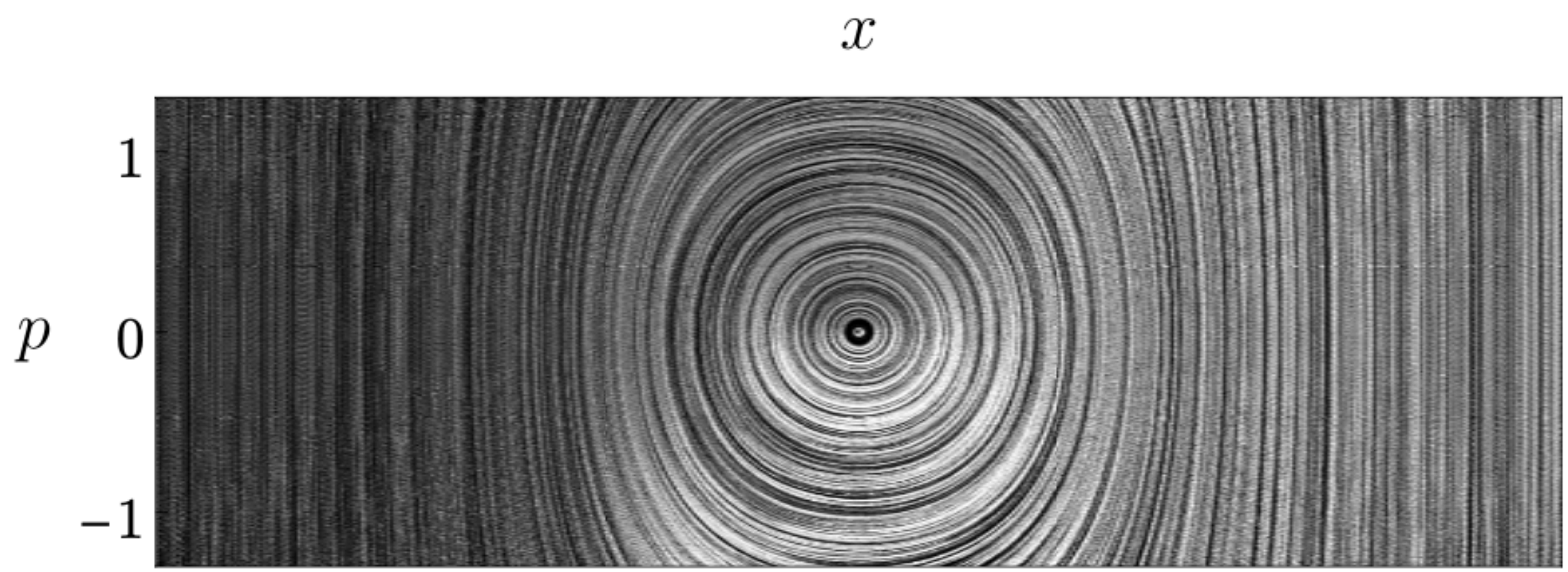
$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{4}\cosh x$$



Does “imagination” matter for stability?

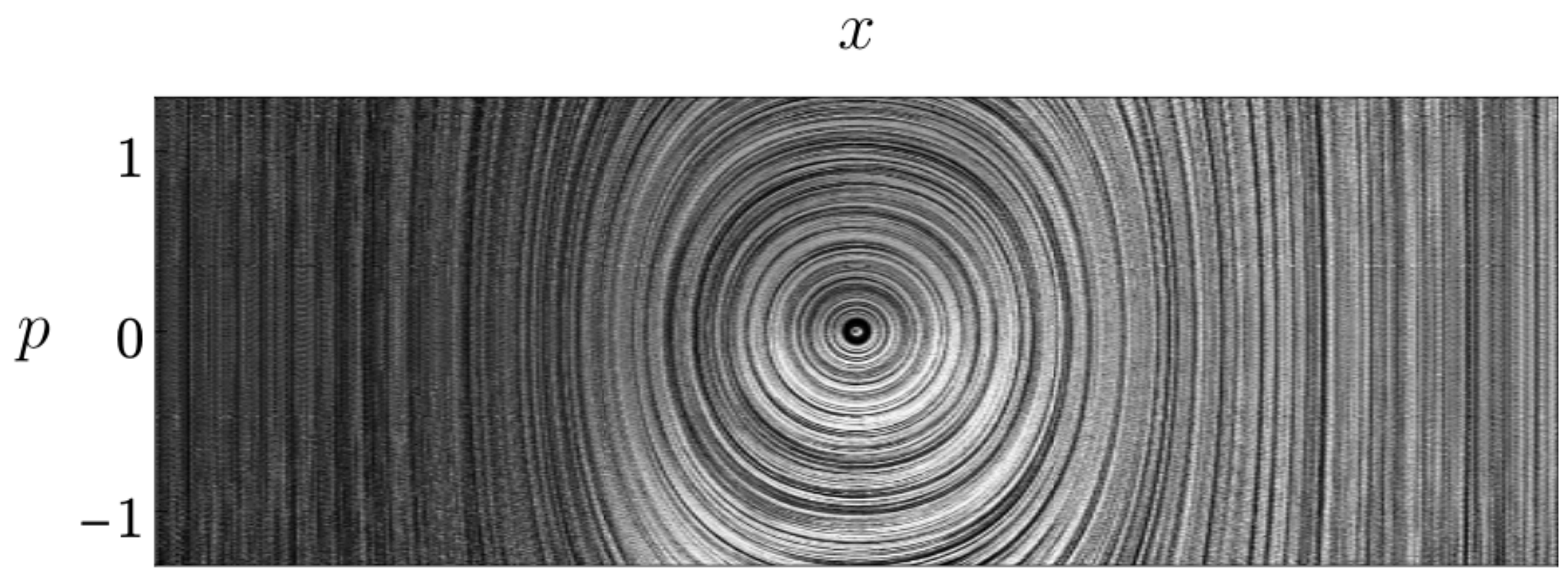
$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{4}\cosh x$$

$$p = i\bar{p} \qquad x = -i\bar{x}$$



Does "imagination" matter for stability?

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{4}\cosh x$$



$$p = i\bar{p} \qquad x = -i\bar{x}$$

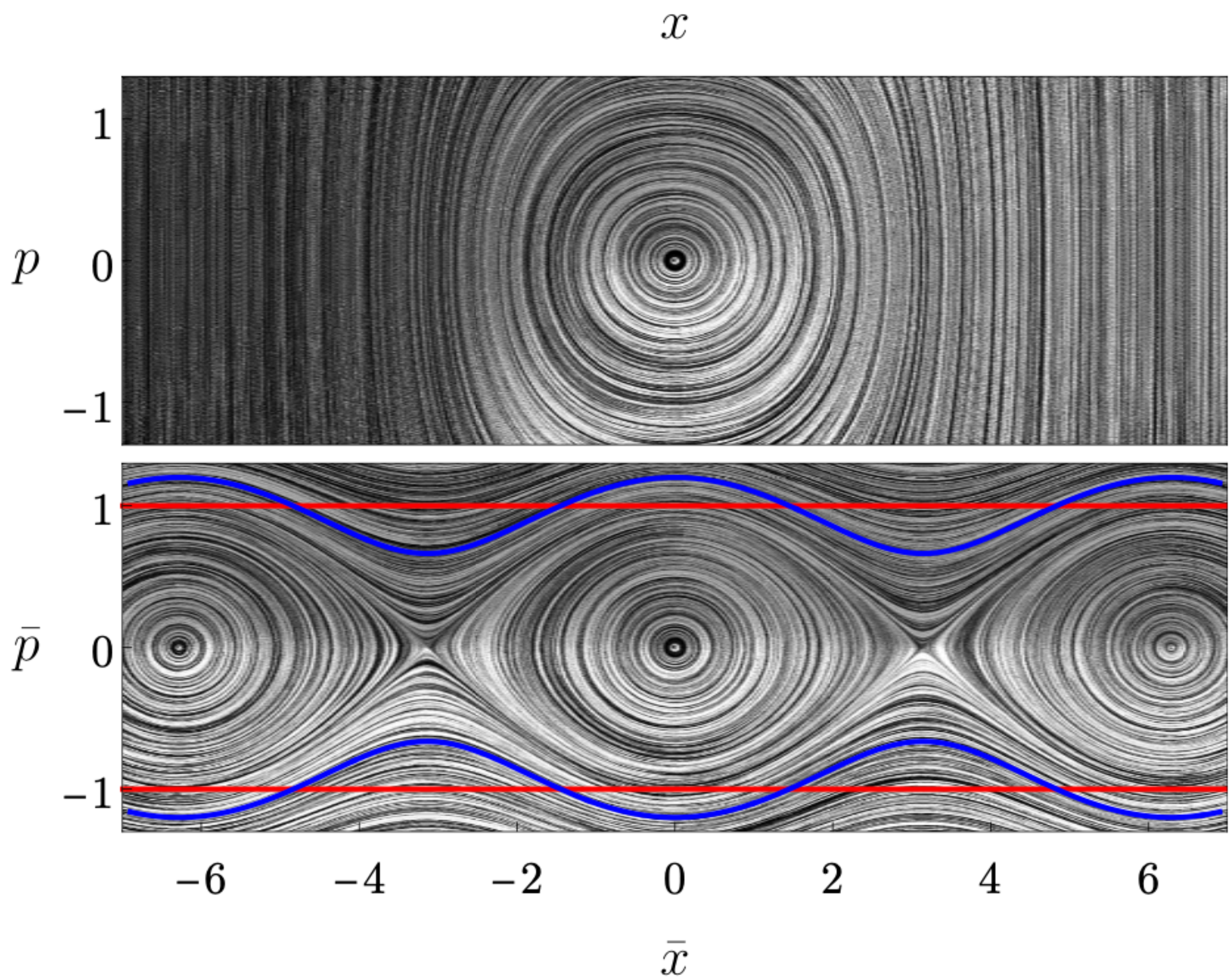
$$\bar{H} = -\frac{\bar{p}^2}{2} + \frac{1}{4}\cos\bar{x}$$

Does "imagination" matter for stability?

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{4}\cosh x$$

$$p = i\bar{p} \qquad x = -i\bar{x}$$

$$\bar{H} = -\frac{\bar{p}^2}{2} + \frac{1}{4}\cos\bar{x}$$



New large class of (Lagrange) stable ghosty systems

$$H_{LV} = \frac{p_x^2}{2} - \frac{p_y^2}{2} + V_{LV}(x, y)$$

New large class of (Lagrange) stable ghosty systems

$$H_{LV} = \frac{p_x^2}{2} - \frac{p_y^2}{2} + V_{LV}(x, y)$$

$$V_{LV} = \frac{f(u) - g(v)}{u^2 + v^2}$$

New large class of (Lagrange) stable ghosty systems

$$H_{LV} = \frac{p_x^2}{2} - \frac{p_y^2}{2} + V_{LV}(x, y)$$

$$V_{LV} = \frac{f(u) - g(v)}{u^2 + v^2}$$

$$u^2 = \frac{1}{2}\left(r^2 - c + \sqrt{(r^2 - c)^2 + 4\,c\,x^2}\right)$$

New large class of (Lagrange) stable ghosty systems

$$H_{LV} = \frac{p_x^2}{2} - \frac{p_y^2}{2} + V_{LV}(x, y)$$

$$V_{LV} = \frac{f(u) - g(v)}{u^2 + v^2}$$

$$u^2 = \frac{1}{2}\left(r^2 - c + \sqrt{(r^2 - c)^2 + 4\,c\,x^2}\right)$$

$$v^2 = -\frac{1}{2}\left(r^2 - c - \sqrt{(r^2 - c)^2 + 4\,c\,x^2}\right)$$

New large class of (Lagrange) stable ghosty systems

$$H_{LV} = \frac{p_x^2}{2} - \frac{p_y^2}{2} + V_{LV}(x, y)$$

$$V_{LV} = \frac{f(u) - g(v)}{u^2 + v^2}$$

$$u^2 = \frac{1}{2}\left(r^2 - c + \sqrt{(r^2 - c)^2 + 4\,c\,x^2}\right)$$

$$v^2 = -\frac{1}{2}\left(r^2 - c - \sqrt{(r^2 - c)^2 + 4\,c\,x^2}\right)$$

$$r^2 = x^2 - y^2$$

New large class of (Lagrange) stable ghosty systems

$$H_{LV} = \frac{p_x^2}{2} - \frac{p_y^2}{2} + V_{LV}(x, y)$$

$$V_{LV} = \frac{f(u) - g(v)}{u^2 + v^2}$$

$$u^2 = \frac{1}{2}\left(r^2 - c + \sqrt{(r^2 - c)^2 + 4\,c\,x^2}\right)$$

$$v^2 = -\frac{1}{2}\left(r^2 - c - \sqrt{(r^2 - c)^2 + 4\,c\,x^2}\right)$$

$$r^2 = x^2 - y^2$$

Condition for stability:

- $c > 0$
- $f(u)$ and $g(v)$ are bounded from below
- $f(u) \geqslant F_0\,|\,u\,|^{\zeta} > 0$
  $g(v) \geqslant G_0\,|\,v\,|^{\eta} > 0$
  with $\zeta > 2$ and $\eta > 2$

What is the black magic?

What is the black magic?

Another First Integral

What is the black magic?

Another First Integral

$$J_{LV} = \left(xp_y + yp_x\right)^2 + \frac{c}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \mathcal{U}$$

What is the black magic?

Another First Integral

$$J_{LV} = \left(xp_y + yp_x\right)^2 + \frac{c}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \mathcal{U}$$

$$\mathcal{U}\,(u, v) = \frac{\left(2\,u^2 + c\right)g\,(v) + \left(2\,v^2 - c\right)f\,(u)}{u^2 + v^2}$$

What is the black magic?

Another First Integral

"Energy"

$$J_{LV} = \left(x p_y + y p_x\right)^2 + \frac{c}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \mathcal{U}$$

$$\mathcal{U}(u, v) = \frac{\left(2\,u^2 + c\right) g(v) + \left(2\,v^2 - c\right) f(u)}{u^2 + v^2}$$

What is the black magic?

Another First Integral

"Energy" "Positive Definite Kinetic Energy"

$$J_{LV} = \left(xp_y + yp_x\right)^2 + \frac{c}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \mathcal{U}$$

$$\mathcal{U}\left(u, v\right) = \frac{\left(2\,u^2 + c\right)g\left(v\right) + \left(2\,v^2 - c\right)f\left(u\right)}{u^2 + v^2}$$

What is the black magic?

Another First Integral

"Energy" "Positive Definite Kinetic Energy" "Potential Energy"

$$J_{LV} = \left(xp_y + yp_x\right)^2 + \frac{c}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \mathcal{U}$$

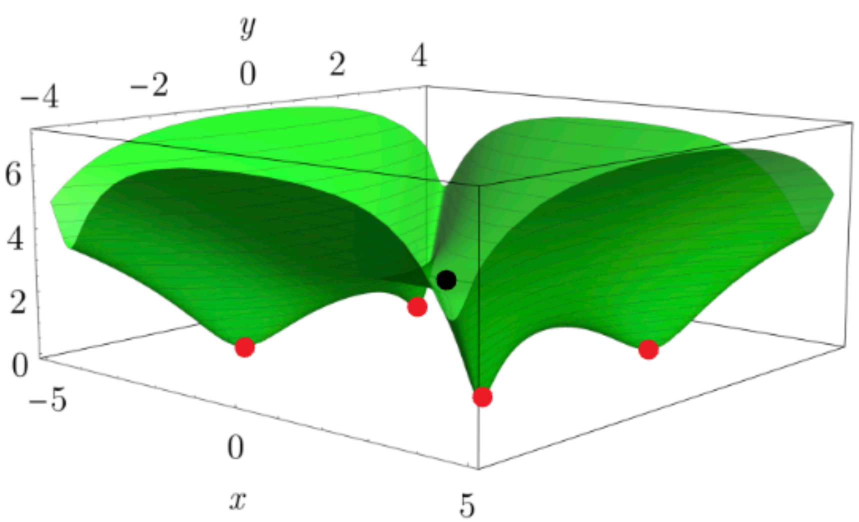
$$\mathcal{U}(u,v) = \frac{\left(2u^2 + c\right)g(v) + \left(2v^2 - c\right)f(u)}{u^2 + v^2}$$

Stable ghost with Polynomial Interaction

$$V_{LV}^{(4)}(x,y) = \frac{\omega_x^2}{2}x^2 - \frac{\omega_y^2}{2}y^2 + \frac{1}{\tilde{c}}\left(\frac{\omega_x^2}{2} - \frac{\omega_y^2}{2}\right)(x^2 - y^2)^2 + c\,\mathscr{C}_4(x^4 - y^4) + \mathscr{C}_4(x^2 - y^2)^3$$

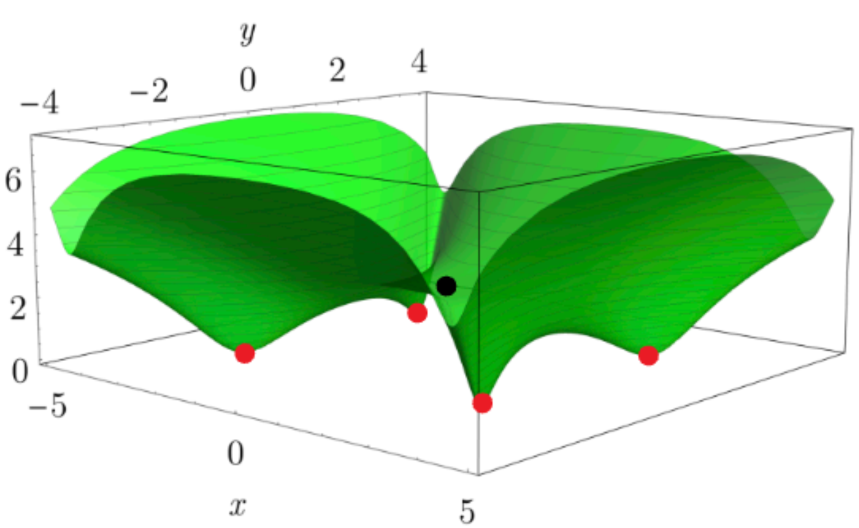
Stable ghost with Polynomial Interaction

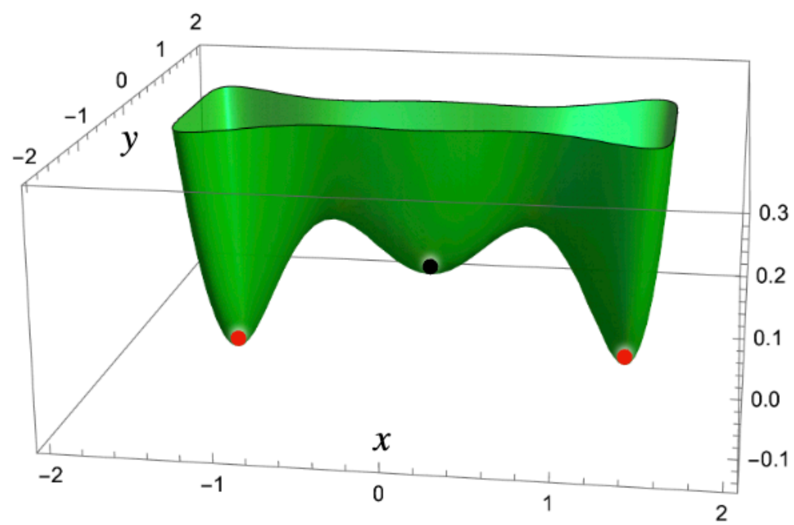
$$V_{LV}^{(4)}(x,y) = \frac{\omega_x^2}{2}x^2 - \frac{\omega_y^2}{2}y^2 + \frac{1}{\tilde{c}}\left(\frac{\omega_x^2}{2} - \frac{\omega_y^2}{2}\right)(x^2-y^2)^2 + c\,\mathscr{C}_4(x^4-y^4) + \mathscr{C}_4(x^2-y^2)^3$$

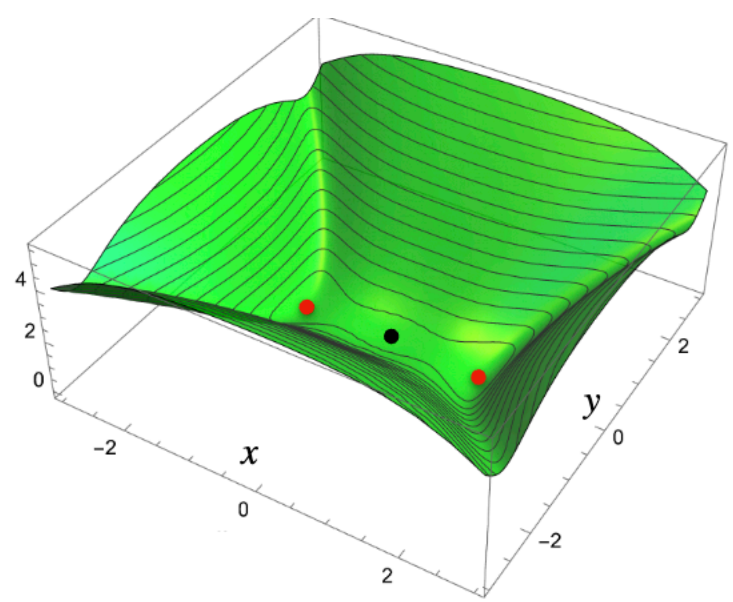


Stable ghost with Polynomial Interaction

$$V^{(4)}_{LV}(x,y) = \frac{\omega_x^2}{2}x^2 - \frac{\omega_y^2}{2}y^2 + \frac{1}{\tilde{c}}\left(\frac{\omega_x^2}{2} - \frac{\omega_y^2}{2}\right)(x^2 - y^2)^2 + c\,\mathscr{C}_4(x^4 - y^4) + \mathscr{C}_4(x^2 - y^2)^3$$







Kolmogorov–Arnold–Moser (KAM) theorem

Small structural changes
do not jeopardise
the stability and finiteness
of motion

Why have not we seen such systems so far in nature?


Thanks a lot for attention!